情報論理 第7回 レポート 解答

1. Proof

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ の導出木 Π が存在 $\Longrightarrow$ 任意の valuation J について $\llbracket \bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta \rrbracket_J = tt$ …… (※) を示せば良い。

Π の深さに関する帰納法による。

(1) Π の深さが1のとき、Π は $\overline{A \Rightarrow A}$ (INIT) の形。よって $\llbracket \bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta \rrbracket_J = \llbracket A \supset A \rrbracket_J = tt$ (c.f. Def 3.3.2)

(2) 深さ $k-1$ 以下の任意の木について (※) が成り立つと仮定。

Π の深さを k とする。Π の root node で使われている導出規則が、

(i) (WEAKENING-R) のとき、Π は $\dfrac{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', A}$ (WEAKENING-R) の形。

帰納法の仮定より $\llbracket \bigwedge\Gamma' \supset \bigvee\Delta' \rrbracket_J = tt$ よって $\llbracket \bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta \rrbracket_J = \llbracket \bigwedge\Gamma' \supset (\bigvee\Delta') \vee A \rrbracket_J = tt$ (c.f. Def 3.3.2)

(ii) ($\neg$-R) のとき、Π は $\dfrac{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \neg A}$ ($\neg$-R) の形。

帰納法の仮定より $\llbracket A \wedge (\bigwedge\Gamma') \supset \bigvee\Delta' \rrbracket_J = tt$. よって $\llbracket \bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta \rrbracket_J = \llbracket \bigwedge\Gamma' \supset (\bigvee\Delta') \vee (\neg A) \rrbracket_J = tt$ (c.f. Def 3.3.2)

(iii) ($\supset$-L) のとき、Π は $\dfrac{\Gamma' \Rightarrow \Delta', A \qquad B, \Pi' \Rightarrow \Sigma'}{A \supset B, \Gamma', \Pi' \Rightarrow \Delta', \Sigma'}$ ($\supset$-L) の形。

帰納法の仮定より $\llbracket \bigwedge\Gamma' \supset (\bigvee\Delta') \vee A \rrbracket_J = tt$, $\llbracket B \wedge (\bigwedge\Pi') \supset \bigvee\Sigma' \rrbracket_J = tt$.

よって、$\llbracket \bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta \rrbracket_J = \llbracket (A \supset B) \wedge (\bigwedge\Gamma') \wedge (\bigwedge\Pi') \supset (\bigvee\Delta') \vee (\bigvee\Sigma') \rrbracket_J = tt$. (c.f. Def 3.3.2)

(iv) その他の規則の場合も同様に、$\llbracket \bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta \rrbracket_J = tt$ が示される。

以上 (i)-(iv) より、Π についても (※) が成り立つ

以上 (1), (2) より、示された

□