形式言語理論 2018 年度 期末試験 2019 年 2 月 1 日

諸注意

- 全 4 問，問題は 2 ページある．
- 解答用紙に解答せよ．裏面等を使う場合は，その旨をはっきりわかるように記すこと．
- 答案には問題の番号を明記すること．
- ノート・参考書等の参照は不可．
- （当然ながら）字が読めない答案には点をあげません．
- 所属及び学年の欄には，進学先の学科も書いてください．
- ウェブページで合格者の学籍番号リストを掲載する予定です（追試の準備に早くとりかかれるように）．これを希望しない人は，答案の冒頭に「学籍番号非公開希望」とはっきり書いてください．ただしその場合，合否は学務システム等を通じて連絡することになります．
- 不正行為には厳正に対処する．

問 1.

アルファベット $\Sigma = \{0, 1\}$ について，次の言語を認識する決定性有限オートマトン (DFA) のうち，状態数最小のものを与えよ．

(1) $\{x \in \Sigma^* \mid [x]$ が 3 の倍数 $\}$.
ただし $[x]$ は，x を二進表現とみなしたときにその表現する自然数．たとえば $[110] = 6$.

(2) $\{x \in \Sigma^* \mid x$ は 00 を接尾語 suffix に持つ $\}$

(3) $\{x \in \Sigma^* \mid [x]$ が 3 の倍数で，かつ，x は 00 を接尾語 suffix に持つ $\}$

問 2.

アルファベット Σ を $\Sigma = \{0, 1\}$ と定める．Σ 上の次の言語それぞれについて，正則（regular）か，また，文脈自由（context-free）か，答えよ． 証明も与えよ．

(1) $\{xx \mid x \in \Sigma^*\}$

(2) $\{0^p \mid p$ は素数 $\}$

問 3.

次の問題を解くアルゴリズムの概略を，5 行程度で与えよ（長くなっても良い）．

入力：アルファベット Σ 上の非決定性有限オートマトン (NFA) M_1, M_2.

出力：「任意の語 $w \in \Sigma^*$ が M_1, M_2 の少なくともどちらかによって受理される」が成り立つか否か.

問 4.

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を決定性有限オートマトン (DFA) とする．決定性有限オートマトンの最小化のための次のような構成を考えよう．Q 上の二項関係の列 $R_0, R_1, R_2 \ldots$（ただし各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $R_n \subseteq Q \times Q$）を次のように帰納的に定義する．

$$R_0 \ = \ Q \times Q \qquad R_{n+1} \ = \ \Phi(R_n) \tag{$\dagger$}$$

ここで Φ は，二項関係 $R \subseteq Q \times Q$ を変換して次の二項関係 $\Phi(R) \subseteq Q \times Q$ を与えるような関数である．

$$(q, q') \in \Phi(R) \iff \left(\begin{array}{l} q \in F \iff q' \in F \ \text{, かつ,} \\ \text{任意の } a \in \Sigma \text{ に対して } \big(\delta(q,a),\, \delta(q',a) \big) \in R \ . \end{array} \right)$$

以下の問いに答えよ．

(1) 関数 Φ が単調であること，すなわち，$R \subseteq R'$ ならば $\Phi(R) \subseteq \Phi(R')$ となること，はすぐに確かめられる．この事実および，R_0 が Q 上の二項関係の中で最大のものであることを用いて，($\dagger$) で定義された二項関係の列 $R_0, R_1, R_2 \ldots$ が

$$R_0 \ \supseteq \ R_1 \ \supseteq \ R_2 \ \supseteq \ \cdots \tag{$\ddagger$}$$

をみたすことを示せ．

(2) 下降列 ($\ddagger$) の極限 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$ を R_ω と書く．下降列 ($\ddagger$) が有限ステップで極限にいたるかどうか，すなわち，ある非負整数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して $R_n = R_{n+1} = R_{n+2} = \cdots = R_\omega$ となるか答えよ．証明または反例も与えよ．

(3) 遷移関数 δ の有限語への拡張を $\delta^* \colon Q \times \Sigma^* \to Q$ と書く．すなわち $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$ に対して

$$\delta^*(q, \varepsilon) \ = \ q \ , \qquad \delta^*(q, aw) \ = \ \delta^*\big(\delta(q,a),\, w \big) \ .$$

任意の非負整数 n（ただし $n \geq 1$）について次が成立することを，n に関する帰納法によって示せ．

> 状態 $q, q' \in Q$ が $(q, q') \in R_n$ となるとき，長さ $n-1$ の任意の語 $w \in \Sigma^{n-1}$ について
>
> $$\delta^*(q, w) \in F \quad \iff \quad \delta^*(q', w) \in F$$
>
> が成り立つ．

(4) 二つの状態が「同じ言語を受理する」二項関係を $\approx$ と書く．すなわち

$$(q, q') \in \approx \quad \iff \quad \big(\text{任意の語 } w \in \Sigma^* \text{ に対して,} \quad \delta^*(q, w) \in F \iff \delta^*(q', w) \in F \big)$$

ふたつの二項関係 R_ω と $\approx$ の間に，包含関係 $R_\omega \subseteq \approx$ が成り立つことを証明せよ．

(5) この逆，すなわち $\approx \subseteq R_\omega$ が成り立つことを証明せよ．ただし Φ の単調性を用いて良い．また，次の簡単に確かめられる事実を用いてよい：ふたつの二項関係 $\approx$ と $\Phi(\approx)$ の間に，包含関係 $\approx \subseteq \Phi(\approx)$ が成立する．