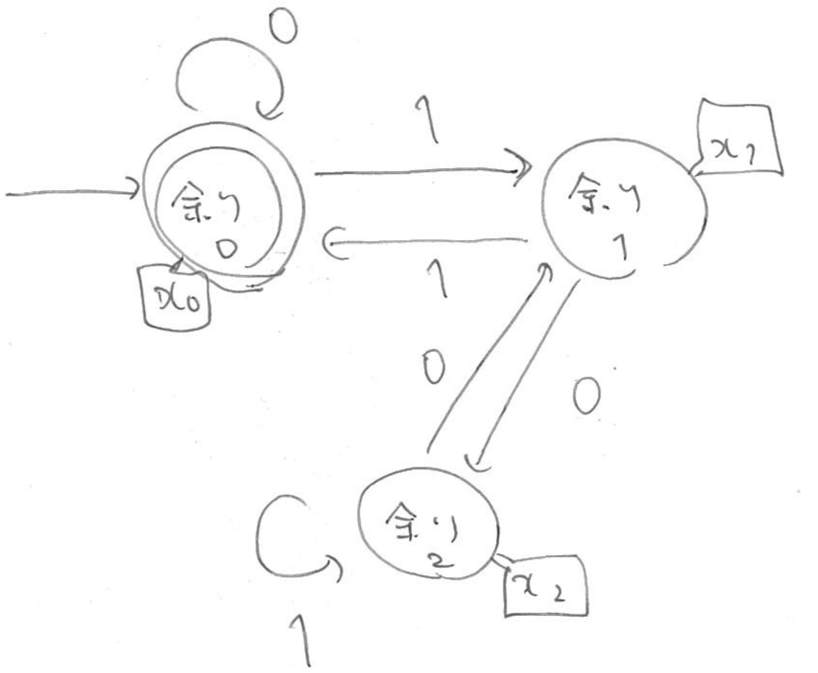
平成３０年度 第２学年専門科目期末試験答案用紙

No. 1

科目名	形式言語理論	試 験 日	2月1日（金）	所属及び学年	国立情報学研究所
学生証番号		氏 名	蓮尾 一郎	連絡用Eメールアドレス	i.hasuo@acm.org

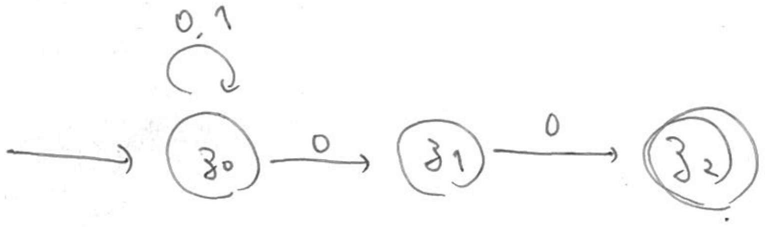
問1.

(1)



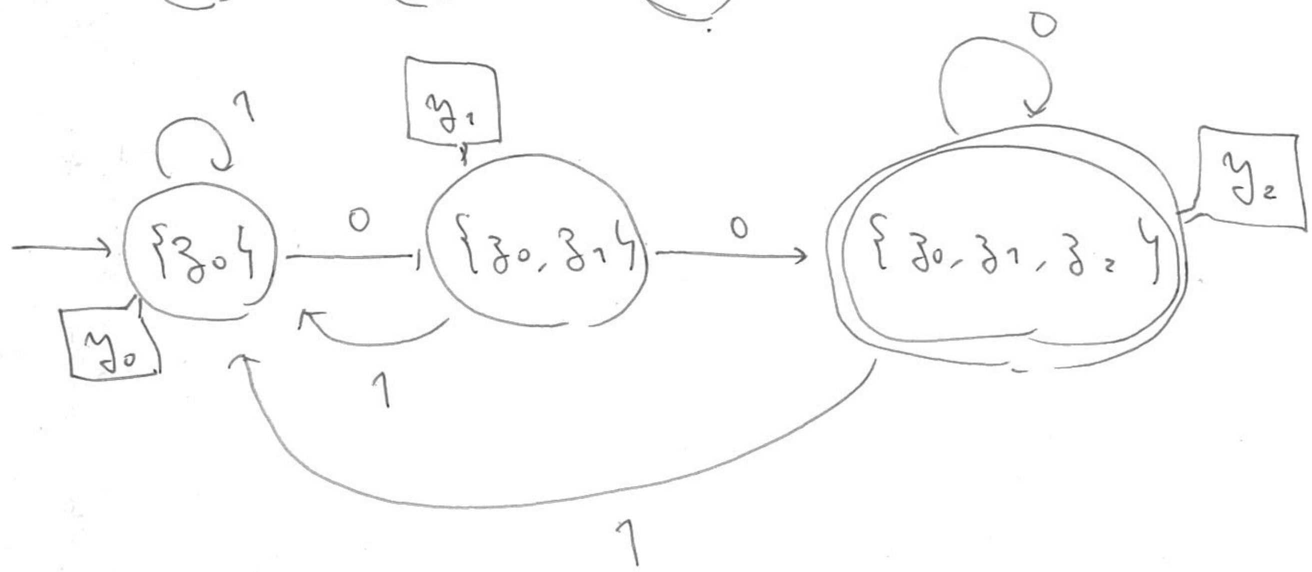
(2)

NFA



powerset Constr.

DFA

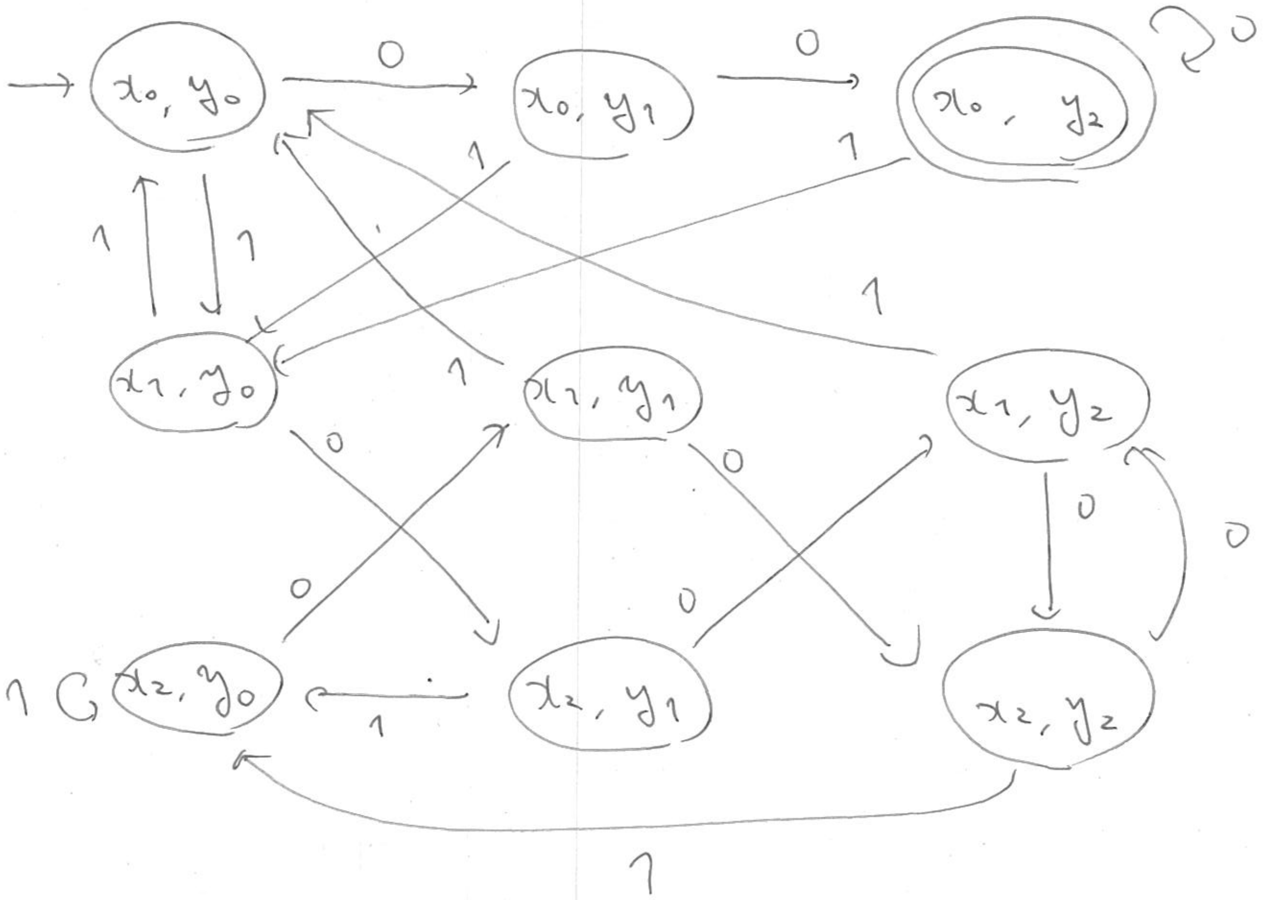


最小?

	y_0	y_1	y_2
y_0			
y_1	X		
y_2	X	X	

→ 最小!

(3) (1), (2) の DFA の synchronized product をとる。

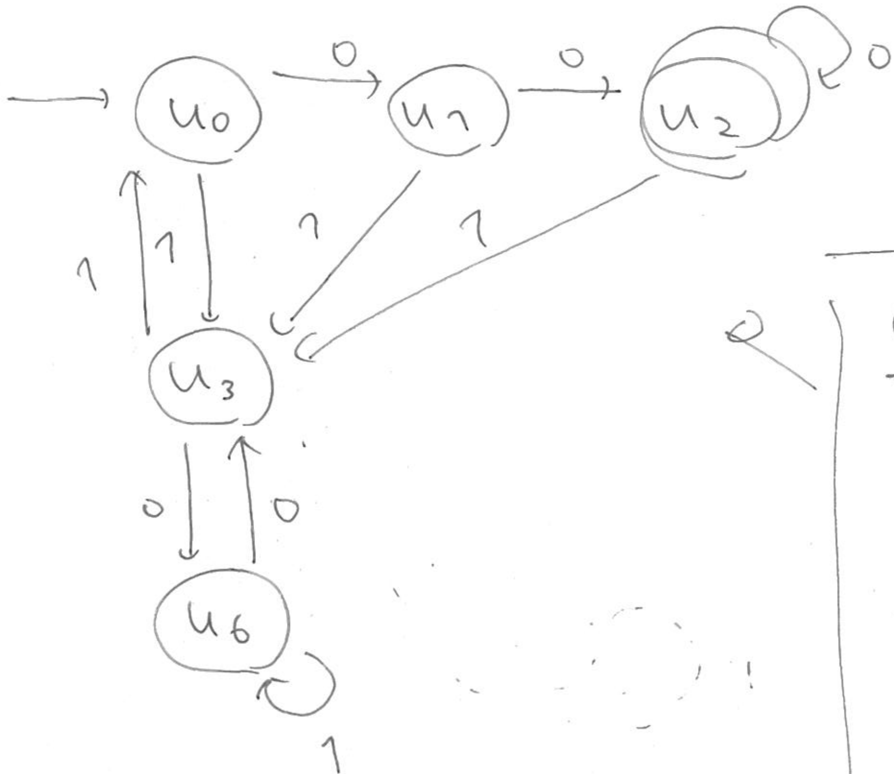


それぞれの state を u_0 u_1 u_2 / u_3 u_4 u_5 / u_6 u_7 u_8 と名付ける。

最小?

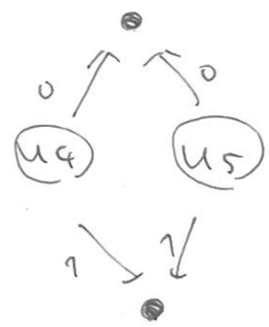
	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_0	/	/	/	/	/	/	/	/	/
u_1	X	/	/	/	/	/			
u_2	X	X	/	/	/				
u_3	X	X	X	/	/				
u_4	X	X	X		/				
u_5	X	X	X			/			
u_6	X	X	X	X	X	X	/		
u_7	X	X	X	X	X	X		/	
u_8	X	X	X	X	X	X			/

→ 最小化の結果。 $\left(\begin{array}{l} u_3 \simeq u_4 \simeq u_5 \\ u_6 \simeq u_7 \simeq u_8 \end{array} \right)$



ヒント

人力最小化は大変だが、



を見ると

$u_4 \simeq u_5$ であることがわかる。

これを突破口に。

問2

(1) 正則でない。

(Pumping Lem. の定数を N とするとき、
$x = 0^N 1$ (i.e. $xx = 0^N 1 0^N 1$)
を考える。)

Context-free でない。

(Ogden's Lemma の定数を N として、
$x = 0^N 1$ とし、
$xx = 0^N 1 0^N 1$ の最初の 0^N を特定位置とする)

○ reg. ⇒ context-free なので、
後半だけでよかった…

問2

(2) regular でない。 (context-free でないので。後述)

context-free でない。

Pumping Lemma の定数 N をとり、

$p > N$ なる素数 p をとる。(とれる)

$0^p = uvwxy$ と分解でき、

$\begin{cases} |vx| \geq 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}.\ |uv^n w x^n y| \text{ は素数} \end{cases}$

いま、
$|uv^{p+1} w x^{p+1} y|$ は素数のはずだが、

$$
\begin{aligned}
&|uv^{p+1} w x^{p+1} y| \\
&= |uvwxy| + p \cdot |vx| \\
&= p + p|vx| = p(1 + |vx|)
\end{aligned}
$$

p の倍数.

これは矛盾.

問3. 出力はすなわち

$$\Sigma^* \stackrel{?}{=} L(M_1) \cup L(M_2)$$

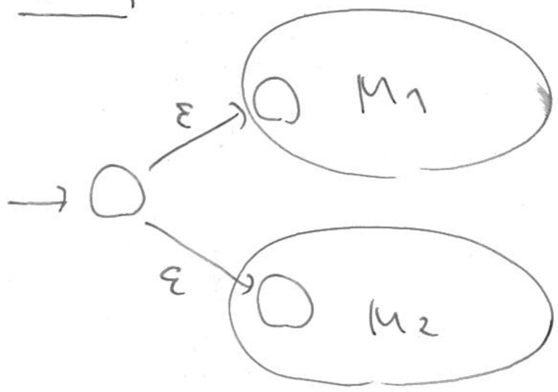
すなわち

$$\overline{L(M_1) \cup L(M_2)} \stackrel{?}{=} \emptyset$$

なので、

M |

1



として、

$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$

となる ε-NFA M を構成。

2

$$M \xmapsto[\text{power-set constr.}]{} M^d \xmapsto[\bigcirc \leftrightarrow \circledcirc]{} \overline{M^d}$$ として、

言語を反転 (complement)

3 DFA $\overline{M^d}$ に対して emptiness check.

$L(\overline{M^d}) = \emptyset \Rightarrow$ Answer "Yes"

$L(\overline{M^d}) \neq \emptyset \Rightarrow$ —— "No"

Rem. 先に M_1, M_2 を各々 DFA に変形した方が計算量的にたすかるかも…

問4

(1) $R_n \supseteq R_{n+1}$ を、$n \in \mathbb{N}$ による帰納法で示す。

<u>$n=0$</u>. $R_0 = \underline{Q \times Q} \supseteq R_1$

Q と Q の間の最大の binary relation.

OK.

<u>$n+1$</u>.

Induction hypothesis より

$$R_n \supseteq R_{n+1}.$$

Φ : 単調より

$$\underset{\displaystyle R_{n+1}}{\overset{\|}{\Phi(R_n)}} \supseteq \underset{\displaystyle R_{n+2}}{\overset{\|}{\Phi(R_{n+1})}}.$$

OK.

(2) いたる。

$R_0 \supseteq R_1 \supseteq \cdots$ は $2^{Q \times Q}$ の中の減少列であり、

- 各 R_n は有限集合 (Q : 有限より)
- $R_n \supsetneq R_{n+1}$ なら、元は少なくとも 1つ減る

より、$R_n \supsetneq R_{n+1}$ は有限回しか起こり得ない。

(3) <u>$n=1$</u> $w \in \Sigma^{n-1} = \Sigma^0$ は、$w = \varepsilon$ でなければならない。

$$\delta^*(q, w) \in F$$

$$\Longleftrightarrow \delta^*(q, \varepsilon) \in F$$

$$\Longleftrightarrow q \in F$$

同様に、$\delta^*(q', w) \in F \Longleftrightarrow q' \in F$.

↓つづく

平成３０年度 第２学年専門科目期末試験答案用紙

No. 1

科目名	形式言語理論	試 験 日	2月1日（金）	所属及び学年	
学生証番号		氏 名		連絡用Eメールアドレス	

↓つづき

よって，

$$(q, q') \in R_1 \implies (q \in F \iff q' \in F)$$

を示せばよい。

$R_1 = \Phi(R_0)$ で，Φ の def. より，上は明らか。 ☐

(4) $(q, q') \in R_\omega \underset{\text{def. of } R_\omega}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$ とする。 $\left(\dfrac{\text{Aim}}{(q, q') \in \approx}\right)$

$\Uparrow$

$\left(\dfrac{\text{Aim}}{\forall w \in \Sigma^*. \ (\delta^*(q, w) \in F \iff \delta^*(q', w) \in F)}\right)$

$w \in \Sigma^*$ を任意にとる。

$\left(\dfrac{\text{Aim.}}{\delta^*(q, w) \in F \iff \delta^*(q', w) \in F}\right)$

$(q, q') \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$ より，特に $n = |w| + 1$ として，

$(q, q') \in R_{|w|+1}$.

(3) および $w \in \Sigma^{|w|+1-1}$ より，$\delta^*(q, w) \in F \iff \delta^*(q', w) \in F$.

よって示された。 ☐

(5)

$$\left[\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Aim}} & \approx \subseteq & \underline{R_\omega} \\ \Uparrow & & \| \mathrm{def.} \\ \underline{\mathrm{Aim}} & & \bigcap_n R_n \\ \forall n \in \mathbb{N}. & & \approx \subseteq R_n \end{array}\right]$$

$\begin{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}. \\ \approx \subseteq R_n \end{pmatrix}$ を、nについての induction で示す。

<u>n=0</u>. $R_0 = Q \times Q \supseteq \approx$. OK.

<u>n+1</u>. Induction hypothesis より

$$\approx \subseteq R_n.$$

Φ : 単調 より

$$\Phi(\approx) \subseteq \Phi(R_n) \underset{\substack{\text{def. of} \\ R_{n+1}}}{=} R_{n+1}.$$

$\approx \subseteq \Phi(\approx)$ より

$$\approx \subseteq R_{n+1}.$$

図