形式言語理論 レポート課題 第1回

1. $f(f^{-1}(W)) \neq W$ となる f, W の例を挙げよ。
また、$V \neq g^{-1}(g(V))$ となる g, V の 〃 。

<u>解答例</u>：$f : \{0\} \longrightarrow \{0, 1\}$; $f(0) = 0$ について
$W = \{0, 1\}$ とすると $f^{-1}(W) = \{0\}$ 　$f(f^{-1}(W)) = \{0\} \neq W$
$g : \{0, 1\} \longrightarrow \{0\}$; $g(0) = g(1) = 0$ について
$V = \{0\}$ とすると、$g(\{0\}) = \{0\}$, $g^{-1}(g(\{0\})) = \{0, 1\} \neq V$ ∎

<u>Rem</u>　f：全射のとき 一般に $f(f^{-1}(W)) = W$ が成り立つ。
　　　g：単射 　〃　 $g^{-1}(g(V)) = V$ 　〃 　（教科書 p.16）

コメント：f や g の始域や終域 (i.e. $f : X \to Y$ の X や Y) を略している人が多かったですが、明示した方が良いでしょう。

2. $R \subseteq X \times Y$ を X から Y への関数と同一視できるための、R の満たすべき性質を列挙せよ。

<u>答</u>
1) 任意の $x \in X$ に対して、$(x, y) \in R$ なる $y \in Y$ が存在する。
2) $(x, y) \in R$, $(x, y') \in R$ なら $y = y'$ である

コメント ① 1) 2) をまとめて、
"任意の $x \in X$ に対して $(x, y) \in R$ なる $y \in Y$ が<u>一意に</u>存在する"
と言っても良いです。
② 1) を落として 2) のみを課したものを 部分関数 と言います
③ "射影 $\pi : R \to X$; $(x, y) \mapsto x$ が全単射"
というのを挙げている人も居ました。全射性が (1) に、単射性が (2) に対応します

3. $P(X) \cong \mathbb{N}$ となる X は存在するか？

答　しない

証明　背理法：全単射 $\varphi : P(X) \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}$ があったとする

$\iota : X \to P(X)$; $x \mapsto \{x\}$ は単射なので

単射 $\varphi \circ \iota : X \to \mathbb{N}$ が存在する。よって X は有限か可算。

1) X：有限 のとき：$P(X)$ も有限なので $P(X) \cong \mathbb{N}$ に矛盾。

2) X：可算 のとき、$X \cong \mathbb{N}$ より $\mathbb{N} \cong P(X) \cong P(\mathbb{N})$ だが、

これは矛盾（教科書、定理1.1）

よって $P(X) \not\cong \mathbb{N}$ が任意の X について成り立つ $\square$

よく有った誤答：「$X = \mathbb{N}$ について

$\varphi : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$: $S \mapsto \sum_{n \in S} n$

が全単射を与える

（or $\psi : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$; $m \mapsto \{i_1, \dots, i_k\}$

但し $m = \sum_{l=1}^{k} 2^{i_l}$ ：m の2進展開）」

これは S：無限集合（e.g. $S = \mathbb{N}$）のときに $\varphi(S)$ を定義できないため

上手く行かない（ψ の場合、これは全射ではない：S：無限のとき

$\psi(m) = S$ なる S は存在しない）

しかし、この方法は $P_{fin}(\mathbb{N}) = \{S \subseteq \mathbb{N} \mid S：有限\}$ について

全単射 $\varphi : P_{fin}(\mathbb{N}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}$ を与えている。

余談　以下の流れでも証明できます：同じく背理法にて。

1. $P(X)$：無限 なら X：無限
2. X：無限のとき 単射 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ が存在する。
3. $\bar{\varphi} : P(\mathbb{N}) \to P(X)$; $S \mapsto \varphi(S)$ は単射。

このとき $P(\mathbb{N}) \to P(X) \cong \mathbb{N}$ より $P(\mathbb{N})$ から $\mathbb{N}$ への単射が存在して矛盾。

読み飛ばしても良いです

（濃度の記法を使えば、2以降は $|\mathbb{N}| \leq |X|$、

$|\mathbb{N}| \leq |P(\mathbb{N})| \leq |P(X)| = |\mathbb{N}|$ より $|\mathbb{N}| = |P(\mathbb{N})|$ で矛盾）

2の証明には（弱い形の）選択公理が必要ですが、

問いに答える証明には不要です。

No.
・　・（　　）

4. $|x|=n$ なる記号列 x について
prefix / suffix / subword / subsequence
はいくつあるか？

答（一応）
- prefix, suffix : $n+1$ 個
- subword : $\frac{1}{2}n(n+1)+1 = \binom{n+1}{2}+1$ 個
- subsequence : 2^n 個

（但し、subword, subsequence の計算では
$x=x_1x_2\cdots x_n$ に対して $x_1,\cdots,x_n$ は全て異なるとした）

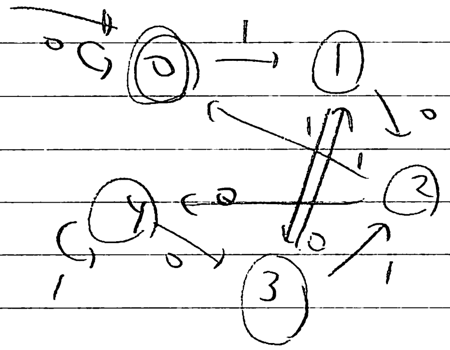
解説：通常"語"と言えば空語（ε）も含むので、
x の prefix（u : x の prefix $\Leftrightarrow$ ある語 v が存在して $x=uv$）
には空語 ε や、x 自身も含みます
また同様に（$m=0$ の場合を考えて）x の部分系列（subsequence）には
空語も含みます

prefix, suffix : 長さを決めれば一意に決まり、可能な長さは
$0,1,\cdots,n$ の $n+1$ 個あるので $n+1$.
subword : 空語で無ければ、始点と終点を決めれば一意に決まるので、
$1\leq i\leq j\leq n$ なる (i,j) の対の数 $=\frac{1}{2}n(n+1)$ コある.
これに空語を加えて $\frac{1}{2}n(n+1)+1$
subsequence : 各々の文字について入れるか入れないかを指定すれば
一意に決まる.
$\square$

（subword, subsequence については問題が少しあいまいですね・・・）

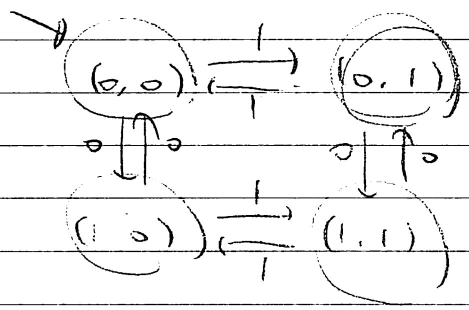
解答例1

5. 1. (leading zero は許すことにした)



状態の上の数は "(入力された文字列の)5で割った余り" を表す。(以下同様)

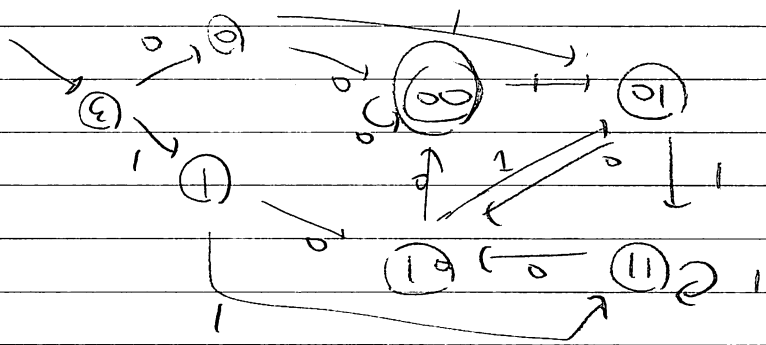
2.



"0の数と1の数" (mod 2)

3.

4



"末尾2桁"

5. $Q = \{0,1\}^4 \cup \{\bot\}$, $q_0 = 0000$

$$\delta(\underset{\in \{0,1\}^4}{x_1x_2x_3x_4}, a) = \begin{cases} x_2x_3x_4a & \text{if } x_1x_2x_3x_4a \text{ が少なくとも0を2つ含む} \\ \bot & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\delta(\bot, a) = \bot$$

$F = \{0,1\}^4$

"最後4桁"