1. $L = \{a_1 \cdots a_n \in \{0,1,2\}^* \mid n \geq 2,\ \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \ni a_n\}$

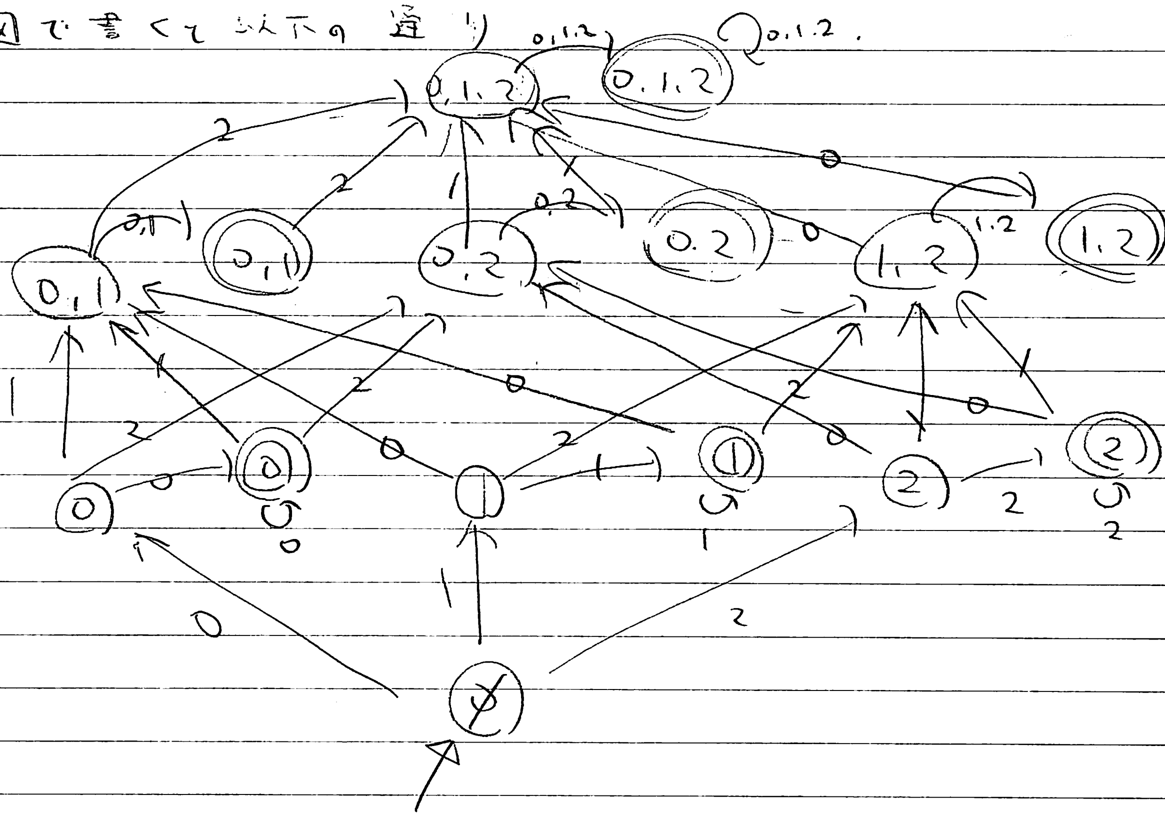
を受理するDFAを構成せよ.

例

$$
\begin{cases}
Q = P(\{0,1,2\}) \times \{t, f\} \setminus \{(\phi, t)\} \\
\Sigma = \{0,1,2\} \\
\delta((A, b), a) = (A \cup \{a\}, b') \quad \text{where } b' = \begin{cases} t & \text{if } a \in A \\ f & \text{if } a \notin A \end{cases} \\
q_0 = (\phi, f) \\
F = P(\{0,1,2\}) \times \{t\} = \{(A, t) \mid A \subseteq \{0,1,2\}\}
\end{cases}
$$

によって $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ とすれば良い.

図で書くと以下の通り.



(実際このDFAは最小である)

No.

. . ( )

2. 以下の言語が正則でないことを示せ。

(1) $L_1 = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ は同数の 0 と 1 を含む$\}$

(2) $L_2 = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ は 0 を 1 より多く含む$\}$

(3) $L_3 = \{0^n 1 0^n \mid n \geq 0\}$

(4) $L_4 = \{0^{n^2} \mid n \geq 1\}$

(5) $L_5 = \{0^p \mid p$ は素数$\}$

(6) $L_6 = \{0^p 1^q \mid p \geq 1$ と $q \geq 1$ は互いに素$\}$

(7) $L_7 = \{0^n 1^m 0^{n+m} \mid n, m \geq 1\}$

---

pf (1) 背理法。DFA $M_1 = (Q, \{0,1\}, \delta, q_0, F)$ が L_1 を認識するとする。

$q_n = \delta^*(q_0, 0^n)$ $(n \geq 1)$ を考えると、

$F \in \delta^*(q_n, 1^m) = \delta^*(q_0, 0^n 1^m)$

$\iff n = m$

なので、q_n $(n \in \mathbb{N})$ は各 n 毎に異なる必要があるが、

これは $|Q|$ の有限性に矛盾 ☒

(2) 背理法。L_2 が正則だと仮定する。すると L_2 を認識する

DFAの遷移規則の 0 と 1 を入れ替えることで

$L_2' = \{x \mid x$ は 1 を 0 より多く含む$\}$ も正則であることがわかるが、

$L_1 = \Sigma^* \setminus (L_2 \cup L_2')$ と L_1 は L_2, L_2' の Boole 演算で表され、

これらが正則なので L_1 も正則となるべきだが、(1) に矛盾 ☒

(3) 背理法。L_3 が正則だと仮定する。pumping lemma より $N \geq 1$ であって、

以下のようなものが取れるので、1つ取って固定する：

$\left[\begin{array}{l} |x| \geq N \text{ なる任意の } x \in L \text{ について、} x = uvw \text{ なる分解で} \\ 1 \leq |v| \leq N, \ \forall m \geq 0 \ uv^m w \in L \text{ なるものが存在する} \end{array}\right]$ (*)

$x = 0^N 1 0^N$ として、$uvw = x$ を (*) での分解とする。

i) v が 1 を含まないとき、$uw = 0^{N-|v|} 1 0^N$ or $uw = 0^N 1 0^{N-|v|}$

なので $uw \notin L$ ($\because |v| \geq 1$) で矛盾

ii) v が 1 を含むとき、uw は 1 を含まないので $uw \notin L$ で矛盾

☒

(5)：背理法　L_5 が正則だと仮定し、$N \geq 1$ を pumping lemma で取れる N とする。素数の無限性より $N \leq p$ なる素数 p が存在する。
このpについて pumping lemma 中の分解 $0^p = uvw$　$(1 \leq |v| \leq N)$
を考えると、$uv^m w = 0^{p+(m-1)|v|}$ は全て L に入るが、
特に $m = p+1$ と取ると $0^{p(|v|+1)} \in L$ となり
$p(|v|+1)$ は合成数なので矛盾 □

(4) (6) (7)：省略。

Hint 授業でやった強い形の pumping lemma：
L：正則のとき $N \geq 1$ が存在して、以下が成立する

(*) 任意の $|x| \geq N$ なる $x \in L$ に対して分解 $x = uvw$ で
(1) $|uv| \leq N$
(2) $1 \leq |v|$
(3) $\forall m \geq 0$　$uv^m w \in L$
なるものがとれる。

を用いると楽なものが多い。
実際、(3) の証明でも、$0^N 1 0^N = uvw$ の分解として
v が前半の 0^N に入るときのみを考えれば良くなる。

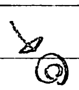
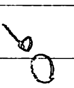
3, 与えられた正則表現 r について、r の表現する言語を受理する DFA を構成する方法を述べよ。

例1.
r から等価な ε-NFA を r の構成について再帰的に構成し、(Thm 2.1)
これを power-set construction によって DFA に変換する (Thm 2.2)

例2
r に対して正規表現の Brzozowski 微分を用いて DFA をつくる。
(第3回ハンドアウトの Rem 1 など参照)

4. L が正則なら $\overline{L} = \Sigma^* - L$ も正則である。理由を説明せよ。

例 L を受理する DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対して
$\overline{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \overline{F})$ where $\overline{F} = Q - F$
が $\overline{L}$ を受理するため。

Rem この構成は NFA ではうまく行かない。
例えば、$\Sigma = \{0, 1\}$,
$M = ($  $)$ に対して $L(M) = \{\varepsilon\}$ だが
$\overline{M} = ($  $)$ $L(\overline{M}) = \emptyset \neq \overline{L(M)}$ である