形式言語理論 レポート課題 第8回.

1. 文脈自由言語(CFL) L_i を生成する文脈自由文法(CFG)を $G_i = (V_i, T_i, P_i, S_i)$ $(i=1,2)$ とする. 一般性を失わず, $V_1 \cap V_2 = \phi$ と仮定してよい.

1. $L_1 \cup L_2$

   新たな変数 S と, 生成規則 $S \to S_1$, $S \to S_2$ を加える:

   $$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\},\ T_1 \cup T_2,\ P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1,\ S \to S_2\},\ S)$$

   は $L_1 \cup L_2$ を生成する CFG.

2. $L_1 \cdot L_2$

   新たな変数 S と, 生成規則 $S \to S_1 S_2$ を加える:

   $$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\},\ T_1 \cup T_2,\ P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\},\ S)$$

   は $L_1 \cdot L_2$ を生成する CFG.

3. L_1^*

   生成規則 $S_1 \to \varepsilon$, $S_1 \to S_1 S_1$ を加える:

   $$G = (V_1,\ T_1,\ P_1 \cup \{S_1 \to \varepsilon,\ S_1 \to S_1 S_1\},\ S_1)$$

   は L_1^* を生成する CFG.

   ($S_1 \to \varepsilon$ を忘れている人が多かったです. これがないと, 生成される言語は L_1^+ となります.)

4. L_1^R

   生成規則の右辺を反転させる:

   $$G = (V_1,\ T_1,\ \{A \to \alpha^R \mid (A \to \alpha) \in P_1\},\ S_1)$$

   は L_1^R を生成する CFG.

2. 一般に、言語の族 $\mathfrak{L} \subseteq \mathcal{P}(T^*)$ に対して、以下が成立する：

(高階で少しわかりにくいですが、$\mathfrak{L}$ は T^* の部分集合 (=言語) たちの集合です。
例：$\mathfrak{L} = \{ L \subseteq T^* \mid L$ は CFL $\}$.)

「$\mathfrak{L}$ が合併と補集合について閉じているなら、
$\mathfrak{L}$ は共通部分についても閉じている。」 … (*)

(つまり、$\forall L_1, L_2 \in \mathfrak{L},\ L_1 \cup L_2,\ \overline{L_1} \in \mathfrak{L}$
$\Rightarrow\ \forall L_1, L_2 \in \mathfrak{L},\ L_1 \cap L_2 \in \mathfrak{L}$.)

(*) は以下のように示される：

$L_1, L_2 \in \mathfrak{L}$ とする。このとき、

$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$. (De Morgan)

つまり $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 から合併と補集合をとる操作の繰り返しで作れる。従って $L_1 \cap L_2 \in \mathfrak{L}$.

いま、T 上の CFL の族 $\mathfrak{L}$ について、以下の事実がある：

- $\mathfrak{L}$ は合併について閉じている (練習問題 3.2.1).
- $\mathfrak{L}$ は共通部分について閉じていない (練習問題 3.4).

よって、(*) とあわせて、$\mathfrak{L}$ は補集合について閉じていてはならないことが結論される。