形式言語理論 2015年度 期末試験 2016年1月8日

諸注意

- 全5問，問題は2ページある．
- 解答用紙に解答せよ．裏面等を使う場合は，その旨をはっきりわかるように記すこと．
- 答案には問題の番号を明記すること．
- ノート・参考書等の参照は不可．
- 所属及び学年の欄には，進学先の学科も書いてください．
- ウェブページで合格者の学籍番号リストを掲載する予定です（追試の準備に早くとりかかれるように）．これを希望しない人は，答案の冒頭に「学籍番号非公開希望」とはっきり書いてください．ただしその場合，合否は UT-MATE を通じて連絡することになります．
- 不正行為には厳正に対処する．

問1.

アルファベット Σ を $\Sigma = \{0, 1\}$ と定める．次の言語それぞれについて，その言語を認識する決定性有限オートマトン (deterministic finite automata, DFA) のうち，状態数最小のものを与えよ．

(1) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists w' \in \Sigma^*. \exists x \in \Sigma. w = w'0x\}$.

Answer.

教科書 19 ページ，例 2.7.4

(2) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|$ は偶数 $\}$．ただし $|w|$ は文字列 w の長さを表す．

Answer.

2 状態を使って文字の長さの偶奇性を記録するオートマトンを作る．簡単．

(3) $L_3 = L_1 \cap L_2$.

Answer.

教科書 36 ページ，定理 2.9.2

問2.

アルファベット Σ を $\Sigma = \{0, 1\}$ と定める．Σ 上の言語

$$\{xx \mid x \in \Sigma^*\}$$

は正則（regular）か？ 証明も与えよ．

Answer.

正則でない．証明は pumping lemma の証明と本質的に同じ（または pumping lemma を用いる）．仮に正則であるとし，状態数 N のオートマトンで認識されるとすると，語 $0^{N+1}10^{N+1}1$ に対しておかしなことになる．

問 3.

次の問題を解くアルゴリズムを 5 行以内で説明せよ．(簡潔な説明でよい．ただし要点を押さえること)

入力： アルファベット Σ 上の正規表現 (regular expressions) φ, ψ

出力： φ, ψ の表現する言語 $L(\varphi), L(\psi) \subseteq \Sigma^*$ について，

$$L(\varphi) = L(\psi)$$

が成立するかどうか．

Answer.

φ, ψ をそれぞれ NFA M_φ, M_ψ に変換したのち equivalence check．最後の equivalence check は inclusion check を両向きに行えばよく，inclusion check は $L(M_\varphi) \cap \overline{L(M_\psi)}$ の emptiness check を行えばよいのであった．

問 4.

次の事実 (†) について考える．

(†) $L \subseteq \Sigma^*$ が文脈自由 (context-free) かつ無限（すなわち，L は無限個の語を含む）であるとする．このとき L に対し，ある自然数 $K > 0$ が存在して次が成立する：すべての自然数 $n \geq 1$ に対し，$nK \leq |s_n| \leq (n+1)K$ をみたす $s_n \in L$ が存在する．

以下の問いに答えよ．

(1) 文脈自由言語のための pumping lemma の statement を述べよ．

Answer.

教科書参照

(2) 文脈自由言語のための pumping lemma を用いて，事実 (†) を証明せよ．

Answer.

教科書 74 ページ，定理 3.8

(3) $G = (V, T, P, S)$ を文脈自由文法とする．このとき，G の生成する言語 $L(G) \subseteq T^*$ が無限かどうか判定する手順を考え，2 ∼ 3 行で概略を示せ．

ただし次を仮定して良い．

- G は Chomsky 標準形である．すなわち，生成規則の集合 P の要素は

$$A \to BC \quad \text{または} \quad A \to a$$

の形をしている（ただし $A, B, C \in V$ かつ $a \in T$）．

- 任意の変数 $A \in V$ は終端記号列を導出しうる（すなわち，ある $w \in T^*$ に対して $A \Rightarrow_G^* w$）．

Answer.

アイデア： ループがあると無限になる．正確には：

- $S \Rightarrow_G^* \alpha A \beta$ （ただし $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$）かつ
- $A \Rightarrow_G^* \gamma A \delta$ （ただし $\gamma, \delta \in (V \cup T)^*$）

となるような $A \in V$ が存在するかを判定すればよい．この判定は生成規則に対して探索アルゴリズムを適用することによって行える．

実際，上記のような A が存在すると仮定すると，

$$A \Rightarrow_G^* \gamma A \delta \Rightarrow_G^* w_\gamma w_A w_\delta, \quad A \Rightarrow_G^* \gamma A \delta \Rightarrow_G^* \gamma\gamma A \delta\delta \Rightarrow_G^* w_\gamma w_\gamma w_A w_\delta w_\delta, \ \cdots$$

となり，A から（ひいては S から）無限種類の語が生成される．ここで $w_\gamma \in T^*$ は $\gamma \Rightarrow_G^* w_\gamma$ となる終端記号列であり，問の仮定よりそのような w_γ は存在し，しかも Chomsky 標準形であるから $w_\gamma \neq \varepsilon$．$w_A, w_\delta$ についても同様.
逆に $L(G)$ が無限集合であると仮定すると，いくらでも長い $w \in L(G)$ がとれるため，pumping lemma の証明と同様の論法によって上記のような $A \in V$ の存在が結論できる．

問 5.

L をアルファベット Σ 上の正規言語（regular language）とする．このとき，集合

$$\mathcal{A} \ = \ \{\, w\backslash L \mid w \in \Sigma^* \,\} \quad \subseteq \ \mathcal{P}(\Sigma^*)$$

が有限集合であることを証明せよ．ただし $w\backslash L$ は言語 L の語 w による左微分をあらわし，

$$w\backslash L \ = \ \{w' \in \Sigma^* \mid ww' \in L\}$$

と定義される．

ヒント： L を認識する DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ をとり，関数

$$f\colon Q \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)\ , \qquad q \longmapsto L(M_q)$$

を考えよ．ただし M_q は M において初期状態のみを q に変更した DFA $(Q, \Sigma, \delta, q, F)$ をあらわす．

Answer.

L を認識する DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ をとり, Q の状態はすべて初期状態 q_0 から reachable と仮定する（そうでない場合は unreachable な状態を除けばよい）．このとき関数 $f\colon Q \to L(\Sigma^*)$ を

$$f(q) \ = \text{（}M \text{ において初期状態を } q \text{ に変更した DFA } M_q \text{ の認識する言語 } L(M_q)\text{）}$$

と定義すると，

- 任意の $w \in \Sigma^*$ に対して $f\big(\delta^*(q_0, w)\big) = w\backslash L$ がなりたつ．このことは w の長さによる帰納法によって証明される．
- よって関数 f の値域は $\mathcal{A}$ に制限され，さらに全射 $f\colon Q \twoheadrightarrow \mathcal{A}$ となる．
- 全射 $f\colon Q \twoheadrightarrow \mathcal{A}$ が存在することにより，$|\mathcal{A}| \leq |Q| < \infty$.