形式言語理論 (0510002)　　第 9 回講義 ハンドアウト (2017/12/15)

蓮尾 一郎 (国立情報学研究所)
http://group-mmm.org/∼ichiro

注意： 期末試験は 2018/2/2 金曜日 4 限になりそうです.

1　今回の講義の内容

オートマトンの最小化から，教科書 3.3 節まで.

レポート課題 (復習問題)

次のページの練習問題.

2　次回の講義の内容

2017.12.22 (Fri) 教科書 3.4-3.5 節.

レポート課題 (予習問題)

なし

練習問題

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ を非負整数全体の集合とする．

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を決定性有限オートマトンとする．ここで Q は有限の状態集合，Σ は有限の文字集合，$\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$ は遷移関数，$q_0 \in Q$ は初期状態，$F \subseteq Q$ は受理状態の集合である．以下，Σ 上の有限語全体の集合を Σ^* と書く（すなわち $\Sigma^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma^n$）．また ε は空語をあらわす．

決定性有限オートマトンの最小化のための次のような構成を考えよう．Q 上の二項関係の列 $R_0, R_1, R_2 \ldots$（ただし各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $R_n \subseteq Q \times Q$）を次のように帰納的に定義する．

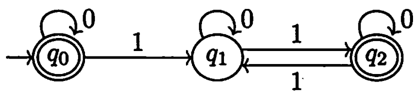
$$R_0 \;=\; Q \times Q \qquad R_{n+1} \;=\; \Phi(R_n) \tag{†}$$

ここで Φ は，二項関係 $R \subseteq Q \times Q$ に対して次の二項関係 $\Phi(R) \subseteq Q \times Q$ を返すような関数である．

$$(q, q') \in \Phi(R) \iff \left(\begin{array}{l} q \in F \iff q' \in F \text{ , かつ,} \\ \text{任意の } a \in \Sigma \text{ に対して } \big(\delta(q,a), \delta(q',a)\big) \in R \text{ .} \end{array}\right)$$

以下の問いに答えよ．

(1) 決定性有限オートマトン $\mathcal{A}$ が下に図示されたものであるとき，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して二項関係 R_n を求めよ．ただし $\Sigma = \{0,1\}$ とし，二重円 ◎ は受理状態をあらわす．



(2) 関数 Φ が単調であること，すなわち，$R \subseteq R'$ ならば $\Phi(R) \subseteq \Phi(R')$ となること，はすぐに確かめられる．この事実および，R_0 が Q 上の二項関係の中で最大のものであることを用いて，(†) で定義された二項関係の列 $R_0, R_1, R_2 \ldots$ が

$$R_0 \;\supseteq\; R_1 \;\supseteq\; R_2 \;\supseteq\; \cdots \tag{‡}$$

をみたすことを示せ．

(3) 下降列 (‡) の極限 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$ を R_ω と書く．下降列 (‡) が有限ステップで極限にいたるかどうか，すなわち，ある非負整数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して $R_n = R_{n+1} = R_{n+2} = \cdots = R_\omega$ となるか答えよ．証明または反例も与えよ．

(4) 遷移関数 δ の有限語への拡張を $\delta^*\colon Q \times \Sigma^* \to Q$ と書く．すなわち $q \in Q$，$a \in \Sigma$，$w \in \Sigma^*$ に対して

$$\delta^*(q, \varepsilon) \;=\; q \;, \qquad \delta^*(q, aw) \;=\; \delta^*\big(\delta(q,a), w\big) \;.$$

任意の非負整数 n（ただし $n \geq 1$）について次が成立することを，n に関する帰納法によって示せ．

状態 $q, q' \in Q$ が $(q, q') \in R_n$ となるとき，長さ $n-1$ の任意の語 $w \in \Sigma^{n-1}$ について

$$\delta^*(q, w) \in F \quad\iff\quad \delta^*(q', w) \in F$$

が成り立つ．

(5) 二つの状態が「同じ言語を受理する」二項関係を $\approx$ と書く．すなわち

$$(q, q') \in \approx \quad\iff\quad \big(\text{任意の語 } w \in \Sigma^* \text{ に対して，} \;\; \delta^*(q, w) \in F \iff \delta^*(q', w) \in F\big)$$

ふたつの二項関係 R_ω と $\approx$ の間に，包含関係 $R_\omega \subseteq \approx$ が成り立つことを証明せよ．

(6) この逆，すなわち $\approx \subseteq R_\omega$ が成り立つことを証明せよ．ただし Φ の単調性を用いて良い．また，次の簡単に確かめられる事実を用いてよい：ふたつの二項関係 $\approx$ と $\Phi(\approx)$ の間に，包含関係 $\approx \subseteq \Phi(\approx)$ が成立する．