形式言語理論 2017 年度 期末試験 2018 年 2 月 2 日

諸注意

- 全 5 問，問題は 2 ページある．
- 解答用紙に解答せよ．裏面等を使う場合は，その旨をはっきりわかるように記すこと．
- 答案には問題の番号を明記すること．
- ノート・参考書等の参照は不可．
- （当然ながら）字が読めない答案には点をあげません．
- 所属及び学年の欄には，進学先の学科も書いてください．
- ウェブページで合格者の学籍番号リストを掲載する予定です（追試の準備に早くとりかかれるように）．これを希望しない人は，答案の冒頭に「学籍番号非公開希望」とはっきり書いてください．ただしその場合，合否は学務システム等を通じて連絡することになります．
- 不正行為には厳正に対処する．

問 1.

アルファベット $\Sigma = \{0, 1\}$ と自然数 N に対して，言語

$$L_N = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \geq N \text{ かつ，} x \text{ の最後から } N \text{ 番目の文字が } 0\}$$

を考える．

(1) L_N を認識する決定性有限オートマトン (deterministic finite automata, DFA) の状態数は少なくとも 2^N であることを証明せよ．

(2) L_N を認識する状態数 $N+1$ の非決定性有限オートマトン (nondeterministic finite automata, NFA) を与えよ．

(3) L_3 を認識する最小 DFA を与えよ．

問 2.

アルファベット Σ を $\Sigma = \{0, 1\}$ と定める．Σ 上の言語

$$\{xx \mid x \in \Sigma^*\}$$

は正則（regular）か？ 文脈自由（context-free）か？ 証明も与えよ．

問 3.

NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ および語 $w \in \Sigma^*$ を入力として，$w \in L(M)$ か否かを判定するアルゴリズムで，時間計算量が $|Q|$ の指数オーダーに**ならない**ものを与えよ．概略を示せば良い．

（注：DFA への変換を経由することにすると，問 1 の内容により時間計算量が $|Q|$ の指数オーダーになってしまう）

問 4.

正規表現（regular expression）r_1, r_2 を入力として，$L(r_1) \subseteq L(r_2)$ か否かを判定するアルゴリズムの，概略を示せ．

問 5.

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を NFA とする．ただし Q は状態集合，Σ は入力アルファベット，$\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ は遷移関係，$q_0 \in Q$ は初期状態，$F \subseteq Q$ は受理状態の集合とする．
　このとき，言語

$$\sqrt{L(M)} \quad = \quad \{x \in \Sigma^* \mid xx \in L(M)\}$$

は正則（regular）である．この事実について，以下の問いに答えよ．

(1) まず $\sqrt{L(M)}$ を認識する**有限状態とは限らない**非決定性オートマトン

$$M' \;=\; \bigl(\, Q \times \Sigma^*,\, \Sigma,\, \delta',\, q'_0,\, F' \,\bigr)$$

を構成したい．遷移関係 δ' を

$$\bigl(\,(q, w), a, (q', w')\,\bigr) \quad \stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad (q, a, q') \in \delta \text{ and } w' = wa$$

とするとき，q'_0 と F' を $L(M') = \sqrt{L(M)}$ となるよう定めよ．

（ヒント： 状態 (q, w) は「これまでに $w \in \Sigma^*$ を読んできて，その結果，今 q にいる」という気持ち）

次に，同じ言語 $\sqrt{L(M)}$ を認識する NFA を構成すべく，M' の状態集合 $Q \times \Sigma^*$ を同値関係で割ることを考える．語 $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ （ただし $a_i \in \Sigma$）に対して，二項関係 $\xrightarrow{w}_\delta \;\subseteq Q \times Q$ を

$$q \xrightarrow{a_1 a_2 \ldots a_n}_\delta q' \quad \stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\exists q_1, q_2, \ldots, q_{n-1} \in Q.\bigl(\,(q, a_1, q_1) \in \delta \text{ and } (q_1, a_2, q_2) \in \delta \text{ and } \cdots \text{ and } (q_{n-1}, a_n, q') \in \delta\,\bigr)$$

によって定義する．さらに，二項関係 $\equiv_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ を

$$w \equiv_M w' \quad \stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall q, q' \in Q.\bigl(\, q \xrightarrow{w}_\delta q' \iff q \xrightarrow{w'}_\delta q' \,\bigr)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(2) 二項関係 $\equiv_M$ が同値関係であることを証明せよ．また，右不変であることを証明せよ．

(3) Well-defined な関数 $\Sigma^*/{\equiv_M} \longrightarrow 2^{Q \times Q}$ を構成することにより，$\equiv_M$ が有限指標であることを示せ．

(4) (1) のオートマトン M' に適切な操作を施すことにより， $L(M'') = \sqrt{L(M)}$ となる NFA

$$M'' \;=\; \bigl(\, Q \times (\Sigma^*/{\equiv_M}),\, \Sigma,\, \delta'',\, q''_0,\, F'' \,\bigr)$$

を構成する．遷移関係 δ''，初期状態 q''_0，受理状態集合 F'' の定義を与えよ．また，これらの定義の well-definedness を証明せよ．