Parametric Effect Monads and Semantics of Effect Systems

(POPL 2014 にて発表)

京都大学数理解析研究所
勝股 審也

エフェクトシステム [Lucassen&Gifford'88]

... とはプログラムの副作用を静的に見積る枠組みである。

$$\Gamma \vdash M : \tau \ \& \ e$$

1. アクセス解析 [Lucassen&Gifford '88, etc.]

$$\Gamma \vdash M : \tau \ \& \ \{rd(\rho), wr(\rho')\}$$

2. 通信動作解析 [Nielson&Nielson '96]

$$\Gamma \vdash M : \tau \ \& \ r!int \,.\, 0 + s?bool \,.\, r!int \,.\, 0$$

► 後に [Wadler '98] はエフェクトとモナド型を統合した。

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \vdash M : \tau \ \& \ e \\ \Gamma \vdash M : T\tau \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma \vdash M : T e \tau$$

本研究の目的

[Wadler '98]が挙げた研究課題:

1. 型 $Te\tau$ の表示的意味論は何であろうか？
2. 一般的なエフェクトシステムの枠組みはどうなるか？

本研究はこれらに対する答えを提案する。具体的な貢献は:

1. 一般的なエフェクトシステム **EFe/EFi** と、それらのパラメトリックエフェクトモナド (PEM) による解釈
2. 副作用の観測による PEM の構成
3. エフェクト健全性を導くための一般的な十分条件

エフェクトの抽象的扱い

まずエフェクトを一般化しよう。色々論文を読むと...

- エフェクトには順序が入っている。この順序は各エフェクトが指す副作用の範囲を比較するものである。
- エフェクトには合成演算が入っている。これは順次実行式の副作用を表現するのに用いられる。

$$M : Te\tau \;\&\; N : Te'\sigma \implies \textbf{let } x \textbf{ be } M \textbf{ in } N : T(e \cdot e')\sigma$$

本研究では「エフェクトは前順序モノイドをなす」と仮定した。

$$\mathbb{E} = (E, \quad \lesssim, \quad 1 \in E, \quad (\cdot) : (E, \lesssim)^2 \to (E, \lesssim))$$

EFe: 明示的部分エフェクト規則を持つエフェクトシステム

$\mathbb{E} = (E, \lesssim, 1, \cdot)$ に対する **EFe** とは以下の計算系である:

- 型

$$\tau ::= b \mid \tau \Rightarrow \tau \mid Te\tau \quad (b \in B, e \in E)$$

- 部分エフェクト規則

$$\frac{\Gamma \vdash M : Te\tau \quad e \lesssim e'}{\Gamma \vdash T(e \lesssim e', M) : Te'\tau}$$

- 副作用なしの計算と順次実行

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash [M] : T1\tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : Te\tau \quad \Gamma, x : \tau \vdash N : Te'\sigma}{\Gamma \vdash \mathbf{let}^{e,e'}\ x\ \mathbf{be}\ M\ \mathbf{in}\ N : T(e \cdot e')\sigma}$$

- 代数的演算 [c.f. Plotkin&Power]

$$\frac{\Gamma \vdash M_i : Te_i\tau \quad (1 \leq i \leq n) \quad (o, f) \in \Sigma^{(n)}}{\Gamma \vdash o(M_1, \cdots, M_n) : T(f(e_1, \cdots, e_n))\tau}$$

パラメトリックエフェクトモナド (PEM)

$\mathbb{E} = (E, \lesssim, 1, \cdot)$ に対する $\mathbb{C}$ 上の PEM は以下のデータからなる。

$$\begin{array}{rcrcl} T & : & (E, \lesssim) & \to & [\mathbb{C}, \mathbb{C}] \\ T_1 & : & \mathrm{Id} & \to & T1 \\ T_{e,e'} & : & Te \circ Te' & \to & T(e \cdot e') \end{array}$$

例: 言語でパラメタライズされた書き込みモナド

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E} & = & (P(\Sigma^*), \subseteq, \{\epsilon\}, - \cdot -), \\ TeI & = & e \times I \end{array}$$

$$(T_1)_I : I \longrightarrow \{\epsilon\} \times I \qquad (T_{e,e'})_I : e \times (e' \times I) \longrightarrow (e \cdot e') \times I$$

$$(T_1)_I : i \longmapsto (\epsilon, i) \qquad (T_{e,e'})_I : (l, (l', i)) \longmapsto (l@l', i)$$

パラメトリックエフェクトモナド (PEM)

- PEM の公理は一般化されたモナド則を含む。

$$
\begin{tikzcd}
TeI \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, equal] & Te(T1I) \arrow[d] \\
T1(TeI) \arrow[r] & TeI
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Te(Te'(Te''I)) \arrow[r] \arrow[d] & Te(T(e' \cdot e'')I) \arrow[d] \\
T(e \cdot e')(Te''I) \arrow[r] & T(e \cdot e' \cdot e'')I
\end{tikzcd}
$$

注意: 一般に各 Te はモナドとはならない。

- PEM の正確な定義:

$$\text{ラックスモノイダル関手 } (T, T_1, T_{e,e'}) : \mathbb{E} \to ([\mathbb{C}, \mathbb{C}], \mathrm{Id}, \circ)$$

(Melliès のパラメトリックモナドを前順序に制限したもの)

- **EFe** の解釈にはストレングスも用いるが、省略する。

$$\theta^e_{I,J} : I \times TeJ \to Te(I \times J)$$

パラメトリックエフェクトモナドの例

- $(E, \leq)$ を結び半束とする。

$$\{(E, \leq, \bot, \vee)\text{ に対する PEM}\} \simeq \{T : (E, \leq) \to \mathbf{Monad}(\mathbb{C})\}$$

- 状態モナドと継続モナドのパラメトリック版が存在する。

前順序モノイド $\mathbb{E} = (E, \lesssim, 1, \cdot)$ と関手 $S : (E, \lesssim) \to \mathbf{Set}$ に対し、以下のエンドは $\mathbb{E}$ に対する $\mathbf{Set}$ 上の PEM となる。

$$\begin{aligned} SeI &= \int_{d \in (E, \lesssim)} Sd \Rightarrow I \times S(d \cdot e) \\ CeI &= \int_{d \in (E, \lesssim)} (I \Rightarrow Sd) \Rightarrow S(e \cdot d) \end{aligned}$$

パラメトリックエフェクトモナドの例

- $(E, \leq)$ を結び半束とする。

$$\{(E, \leq, \bot, \vee) \text{ に対する PEM}\} \simeq \{T : (E, \leq) \to \mathbf{Monad}(\mathbb{C})\}$$

- 状態モナドと継続モナドのパラメトリック版が存在する。

前順序モノイド $\mathbb{E} = (E, \lesssim, 1, \cdot)$ と関手 $S : (E, \lesssim) \to \mathbf{Set}$ に対し、以下のエンドは $\mathbb{E}$ に対する $\mathbf{Set}$ 上の PEM となる。

$$\begin{aligned} SeI &= \forall d \in E \,.\, Sd \Rightarrow I \times S(d \cdot e) \\ CeI &= \forall d \in E \,.\, (I \Rightarrow Sd) \Rightarrow S(e \cdot d) \end{aligned}$$

パラメトリックエフェクトモナドの構成

良く知られている構造から PEM を作る方法を与えた。この構成はエフェクトに関する以下の側面を元にしている。

- エフェクトは順序代数をなす。
  - アクセス解析の場合: 定数 $rd(\rho), wr(\rho)$ のある結び半束
- エフェクトは実際の副作用の抽象的な表現を与えている。

これらの側面を数学的に捉えよう。

副作用の観測

...は以下のデータからなる。

$$\alpha : T \longrightarrow (S, \sqsubseteq)$$

- $(S, \sqsubseteq)$ は $\mathbf{Set}$ 上の前順序付きモナド [勝股&佐藤 '13]
  — エフェクトがなす順序代数をモデル化
- T は $\mathbf{Set}$ 上のモナド
  — 副作用をモデル化
- $\alpha : T \to S$ はモナド射
  — 副作用の抽象化をモデル化

パラメトリックエフェクトモナドの構成

副作用の観測から前順序モノイド $\mathbb{E}$ と PEM D を作る。

$$\alpha : T \longrightarrow (S, \sqsubseteq)$$

- $\mathbb{E}$ の台となる前順序集合を $(S1, \sqsubseteq_1)$ で取り、

$$\eta_1(*) \in S1, \quad e \cdot e' = (\lambda * \in 1 \,.\, e')^\# e$$

で前順序モノイドにする ($\mathbb{E} \simeq (\mathbf{Set}_S(1,1), \sqsubseteq_1)^{op}$)。

定理 以下の D は $\mathbb{E}$ に対する $\mathbf{Set}$ 上の PEM となる。

$$DeI = \{c \in TI \mid \alpha_1 \circ T!_I(c) \sqsubseteq_1 e\}$$

PEMの構成の具体例

論文中では以下の副作用の観測から PEM を構成した。

副作用の観測	モノイド
$\mathrm{Wr} \xrightarrow{\{-\}} (P \circ \mathrm{Wr}, \subseteq)$	$P(\Sigma^*)$
$(E + -) \xrightarrow{\{-\}} (P(E + -), \subseteq)$	$P(E + 1)$
$T_\Omega \xrightarrow{\lvert - \rvert} (P(\lvert\Omega\rvert + -), \subseteq)$	$P(\lvert\Omega\rvert + 1)$
$T_\Omega \xrightarrow{\{-\}} (P \circ T_\Omega, \subseteq)$	$P(T_\Omega 1)$
$D \circ \mathrm{Wr} \xrightarrow{\mathrm{S} \circ \mathrm{Wr}} (P^+ \circ \mathrm{Wr}, \subseteq)$	$P^+(\Sigma^*)$
$D \circ \mathrm{Wr} \xrightarrow{\{-\}} (\mathrm{Cv} \circ \mathrm{Wr}, \subseteq)$	$\mathrm{Cv}(\Sigma^*)$

エフェクト健全性 (概略)

- エフェクト e が指している副作用の範囲を

$$\color{red}{Seb} \subseteq T[\![b]\!]$$

によって与える。

- **EFe** の項を λ_{ML} 項として解釈する。任意の項 M に対して

$$M : Teb \implies [\![M]\!] \in Seb$$

が成立する時、**EFe** は (S に対して) エフェクト健全であると言う。

定理 S が副作用のない計算を含み、かつ S が **EFe** 中の代数的演算について閉じていれば、エフェクト健全性が成立する。

まとめ

- PEM という圏論的構造を用いて一般的なエフェクトシステムの表示的意味論を与えた。
- PEM を副作用の観測を通して構成する方法を与えた。
- エフェクト健全性を示すための一般的な十分条件を与えた。
- (PEM に対して代数的演算の概念を拡張した。)