

第3回 レポート解答 (2014/10/24出題分)

復習問題

1. $\{a_1 \cdots a_n \in \{0, 1, 2\}^* \mid n \geq 2, a_n \in \{a_1, \dots, a_{n-1}\}\}$ を受理する決定性有限オートマトン。

$$M = (\Omega, \{0, 1, 2\}, \delta, q_E, F)$$

- $\Omega = \{q_E, q_0, q_1, q_2, q_{01}, q_{02}, q_{12}, q_{012}\} \cup F$
- $F = \{f_0, f_1, f_2, f_{01}, f_{02}, f_{12}, f_{012}\}$
- 以下. $a, a', a'' \in \{0, 1, 2\}$ とする。

$$\begin{aligned} \bullet \delta(q_E, a) &= q_a, \quad \delta(q_a, a') = \delta(f_a, a') = \begin{cases} f_a & (a' = a) \\ q_{aa'} & (a < a') \\ q_{a'a} & (a > a') \end{cases} \\ \bullet \delta(q_{012}, a) &= \delta(f_{012}, a) \\ &= f_{012} \quad \bullet \delta(q_{aa'}, a'') = \delta(f_{aa'}, a'') = \begin{cases} f_{aa'} & (a'' = a \text{ or } a') \\ q_{012} & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

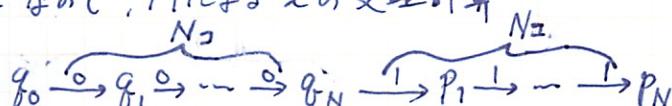
2. 次の言語が正則でないことを示せ。

$$(1). L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{は偶数の } 0 \text{ を } 1 \text{ に含む}\}.$$

証明) 背理法による。Lを受理する決定性有限オートマトンが存在したとして、それを、

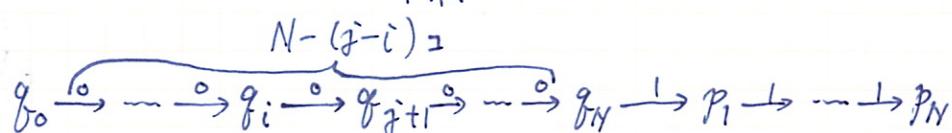
$$M = (\Omega, \Sigma, \delta, q_0, F) \text{ とする。} N = |\Omega| \text{ とし, } x = 0^N 1^N \text{ を考} \check{\text{え}} \text{る。}$$

$x \in L$ なので、M は x の受理計算



が存在する。 $N = |\Omega|$ より、ある $0 \leq i < j \leq N$ が存在して、 $q_i = q_j$ である。

q_i から q_j までのスキップして計算。



を考えると、この計算により $0^{N-(j-i)} 1^N$ が受理される。すなはち $0^{N-(j-i)} 1^N \in L$ 。

しかし、 $j-i > 0$ なので $N-(j-i) \neq N$ より $0^{N-(j-i)} 1^N \notin L$ となり矛盾。//

$$(2). L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{は } 0 \text{ を } 1 \text{ より多く含む}\}$$

証明省略、(1. と同様の方針で示せる。)

$$(3) L = \{0^n \mid 0^n \mid n \geq 0\}.$$

証明) L が正則と仮定すると, pumping lemma より,

$N \geq 1$ が存在して, 長さ N 以上の任意の $x \in L$ について

$$1. |v| \leq N$$

$$2. \forall m \geq 0, uv^m w \in L$$

をみたす x の分解 $x = uvw$ が存在する。

この文言を

PL

と略記し,

次の問題以降にて
適用する。

いま, $0^N \mid 0^N \in L$ を考えると, $|0^N \mid 0^N| \geq N$ より,

上記 1, 2. をみたす分解 $0^N \mid 0^N = uvw$ がある。

$$|v| = k \text{ とする。}$$

i). $v \mid 1$ が含まれるとき, $u, w \in 0^*$ である。

$m=0$ のとき, $uw \in L$ であるが, $uw \in 0^*$ なので $uw \notin L$ となり矛盾。

ii) $v \mid 1$ が含まれないとき, (すなはち $v \in 0^*$ の時).

$m=0$ のとき, $uw \in L$ である。しかし, $|v| \geq 1$ より v は 1 以上の 0 を含むため,

uw は $0^{N-k} \mid 0^N$ か, $0^N \mid 0^{N-k}$ のいずれかである。

いずれの場合も $uw \notin L$ となり矛盾する。

i), ii), いずれの場合も矛盾が導かれることから, L_3 は正則ではない。//

$$(4) L = \{0^{n^2} \mid n \geq 1\}.$$

証明) PL

$0^{N^2} \in L$ を考えると $|0^{N^2}| \geq N$ より, 上記 1, 2. をみたす分解 $0^{N^2} = uvw$ がある。

$|v| = k$ とすると. $m=2$ のとき $uv^2w = 0^{N^2+k} \in L$ である。

しかし, $1 \leq k < N$ より.

$$N^2 < N^2 + k < N^2 + 2N + 1 = (N+1)^2$$

なので, $N^2 + k$ は平方数ではない。したがって $uv^2w \notin L$ となり矛盾。//

(5). $L = \{0^p \mid p \text{は素数}\}$.

証明) PL

$p \geq N$ より大きい素数とすると, $|0^p| \geq N$ より, 上記 1, 2 をみたす,

0^p の分解 $0^p = uvw$ がある。

$|v|=k$ とおくと, $m=p+1$ のとき, $uvw^{p+1}w \in L$ であるが,

$$uvw^{p+1}w = 0^{p+pk} = 0^{p(k+1)}$$

である, $p(k+1)$ は素数ではない。よって $uvw^{p+1}w \notin L$ となり矛盾。

//

(6) $L = \{0^{p^q} \mid p \geq 1 \text{ と } q \geq 1 \text{ は互いに素}\}$

証明) PL

$p, q \geq N$ を $p \neq q$ である素数とすると $|0^{p^q}| \geq N$ より

上記 1, 2 をみたす 分解 $0^{p^q} = uvw$ がある。

$|v|=k$ とおく。

(i) v が 0 と 1 の両方を含むとき, $v = v_1 0 | v_2$ である。

$m=2$ のとき, $uvw^2w \in L$ であるが,

$$uvw^2w = uv_1 0 | v_2 v_1 0 | v_2 w$$

なので, $uvw^2w \notin L$ となり矛盾。

(ii) $v \in 0^*$ のとき, $m \geq 0$ について $uvw^m w = 0^{p+(m-1)k} |^q \in L$ である。

しかし, $p+(m-1)k \equiv 0 \pmod{q}$ となるような m' をとると,

$uvw^{m'} w \notin L$ となり矛盾。

(iii) $v \in 1^*$ のとき. (ii) と同様。

(i), (ii), (iii). いずれの場合も矛盾が導かれるので, L は正則ではない。

$$(7) L = \{ 0^n |^m 0^{n+m} \mid n, m \geq 1 \}$$

証明) PL

$x = 0^N | 0^{N+1} \in L$ を考えると, $|x| \geq N$ おり, 上記 1.2 を用いて x の分解 $x = uwv$ がある。

$|v| = k$ とする。

(i) ハが "1" を含まないとき, uwv は $0^{N-k} | 0^{N+1}$ か, $0^N | 0^{N+1-k}$ のいずれかである。

しかし, いずれの場合も $uwv \notin L$ であり, $uwv \in L$ と矛盾する。

(ii) ハが "1" を含むとき, $uwv \in L$ であるが, $uwv \in 0^*$ なので $uwv \notin L$ となり矛盾。

(i), (ii), いずれの場合も 矛盾が導かれるので, L は正則ではない。 //

予習問題.

3. 与えられた 正則表現 ψ について, ψ が表現する言語を受理する,
(E動作なしの) 決定性有限オートマトンを構成する手順。

例, 正則表現 ψ の構成に関する帰納法により, E動作付非決定性有限
オートマトンを構成し, これと同じ言語を受理する決定性有限オートマトンを構成する。
(具体的な構成法は 定理 2.7, および 2.2 による).

4. L が 正則言語のとき, その補集合 $\bar{L} = \Sigma^* - L$ が 正則である 理由.

例. L を受理する 決定性有限オートマトンを $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ とするとき
 \bar{L} は $M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \bar{F})$ によって 受理されるから。
(但し, $\bar{F} = Q - F$.)