第3回 レポート解答 (2014/10/24 出題分)

復習問題

1. $\{a_1 \cdots a_n \in \{0,1,2\}^* \mid n \geq 2,\ a_n \in \{a_1, \cdots, a_{n-1}\}\}$ を受理する決定性有限オートマトン.

$M = (Q, \{0,1,2\}, \delta, q_\varepsilon, F)$

- $Q = \{q_\varepsilon, q_0, q_1, q_2, q_{01}, q_{02}, q_{12}, q_{012}\} \cup F$
- $F = \{f_0, f_1, f_2, f_{01}, f_{02}, f_{12}, f_{012}\}$
- 以下. $a, a', a'' \in \{0, 1, 2\}$ とする。

• $\delta(q_\varepsilon, a) = q_a$.

• $\delta(q_a, a') = \delta(f_a, a') = \begin{cases} f_a & (a' = a) \\ q_{aa'} & (a < a') \\ q_{a'a} & (a > a') \end{cases}$

• $\delta(q_{012}, a) = \delta(f_{012}, a) = f_{012}$

• $\delta(q_{aa'}, a'') = \delta(f_{aa'}, a'') = \begin{cases} f_{aa'} & (a'' = a \text{ or } a') \\ q_{012} & (\text{otherwise}) \end{cases}$

2. 次の言語が正則でないことを示せ.

(1). $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ は同数の0と1を含む$\}$.

証明) 背理法による。L を受理する決定性有限オートマトンが存在したとして, それを, $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ とする。$N = |Q|$ とし, $x = 0^N 1^N$ について考える。

$x \in L$ なので, M による x の受理計算

$$\overbrace{q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} q_N}^{N個} \xrightarrow{1} \overbrace{p_1 \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{1} p_N}^{N個}$$

が存在する。$N = |Q|$ より. ある $0 \leq i < j \leq N$ が存在して, $q_i = q_j$ である。

q_i から q_j までをスキップした計算.

$$\overbrace{q_0 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} q_i \xrightarrow{0} q_{j+1} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} q_N}^{N-(j-i)個} \xrightarrow{1} p_1 \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{1} p_N$$

を考えると. この計算により $0^{N-(j-i)} 1^N$ が受理される。すなわち $0^{N-(j-i)} 1^N \in L$。

しかし, $j - i > 0$ なので $N - (j-i) \neq N$ より $0^{N-(j-i)} 1^N \notin L$ となり矛盾。//

(2). $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ は0を1より多く含む$\}$

証明省略, (1. と同様の方針で示せる。)

(3) $L=\{0^n 1 0^n \mid n\geq 0\}$.

証明) L が正則と仮定すると，pumping lemma より，
$N\geq 1$ が存在して，長さ N 以上の任意の $x\in L$ について
1. $1\leq |v| < N$
2. $\forall m\geq 0.\ uv^m w\in L$

をみたす x の分解 $x=uvw$ が存在する。

この文言を $\boxed{\text{PL}}$ と略記し，次の問題以降にも流用する.

いま. $0^N 1 0^N\in L$ を考えると, $|0^N 1 0^N|\geq N$ より，
上記1, 2, をみたす分解 $0^N 1 0^N = uvw$ がある。
$|v|=k$ とする。

i). v に 1 が含まれるとき, $u, w\in 0^*$ である。
$m=0$ のとき. $uw\in L$ であるが，$uw\in 0^*$ なので $uw\notin L$ となり矛盾。

ii) v に 1 が含まれないとき，(すなわち $v\in 0^*$ のとき).
$m=0$ のとき，$uw\in L$ である。しかし. $|v|\geq 1$ より v は1つ以上の0を含むため，
uw は $0^{N-k}10^N$ か, 0^N10^{N-k} のいずれかである。
いずれの場合も $uw\notin L$ となり矛盾する。

i), ii), いずれの場合も矛盾が導かれることから，L_3 は正則ではない。//

(4) $L=\{0^{n^2}\mid n\geq 1\}$.

証明) $\boxed{\text{PL}}$.

$0^{N^2}\in L$ を考えると $|0^{N^2}|\geq N$ より. 上記1, 2をみたす分解 $0^{N^2}=uvw$ がある。
$|v|=k$ とすると. $m=2$ のとき $uv^2w=0^{N^2+k}\in L$ である。
しかし. $1\leq k<N$ より.

$$N^2 < N^2+k < N^2+2N+1=(N+1)^2.$$

なので，N^2+k は平方数ではない。したがって $uv^2w\notin L$ となり矛盾。//

(5). $L=\{0^p \mid p$は素数$\}$.

証明). $\boxed{\text{PL}}$.

pをNより大きい素数とすると, $|0^p|\geq N$より. 上記1, 2をみたす,

0^pの分解　$0^p=uvw$　がある。

$|v|=k$とおくと. $m=p+1$のとき. $uv^{p+1}w\in L$であるが,

$$uv^{p+1}w=0^{p+pk}=0^{p(k+1)}$$

であり, $p(k+1)$は素数ではない。よって$uv^{p+1}w\notin L$となり矛盾。 //

(6) $L=\{0^p1^q \mid p\geq 1$と$q\geq 1$は互いに素$\}$

証明) $\boxed{\text{PL}}$

$p, q\geq N$を$p\neq q$である素数とすると$|0^p1^q|\geq N$より

上記1, 2をみたす分解$0^p1^q=uvw$がある.

$|v|=k$とおく.

(i) vが0と1の両方を含むとき, $v=v_1 01 v_2$である。

$m=2$のとき. $uv^2w\in L$であるが,

$uv^2w=uv_1 01 v_2 v_1 01 v_2 w$

なので, $uv^2w\notin L$となり矛盾。

(ii) $v\in 0^*$のとき, $m\geq 0$について$uv^mw=0^{p+(m-1)k}1^q\in L$である。

しかし, $p+(m'-1)k\equiv 0 \pmod q$となるような$m'$をとると.

$uv^{m'}w\notin L$となり矛盾。

(iii) $v\in 1^*$のとき. (ii)と同様。

(i), (ii), (iii). いずれの場合も矛盾が導かれるので, Lは正則ではない。

(7) $L=\{0^n 1^m 0^{n+m} \mid n, m \geq 1\}$

証明) $\boxed{\quad PL \quad}$

$x=0^N 1 0^{N+1} \in L$ を考えると, $|x| \geq N$ より. 上記1, 2をみたす x の分解 $x=uvw$ がある。

$|v|=k$ とする。

(i) v が 1 を含まないとき, uw は $0^{N-k} 1 0^{N+1}$ か, $0^N 1 0^{N+1-k}$ のいずれかである。

しかし, いずれの場合も $uw \notin L$ であり. $uw \in L$ と矛盾する。

(ii) v が 1 を含むとき. $uw \in L$ であるが. $uw \in 0^*$ なので $uw \notin L$ となり矛盾。

(i), (ii). いずれの場合も矛盾が導かれるので, L は正則ではない。 //

予習問題.

3. 与えられた正則表現 γ について, γ が表現する言語を受理する, (ε動作なしの) 決定性有限オートマトンを構成する手順。

例, 正則表現 γ の構成に関する帰納法により, ε動作付非決定性有限オートマトンを構成し, これと同じ言語を受理する決定性有限オートマトンを構成する.
(具体的な構成法は 定理2.7, および 2.2 による).

4. L が正則言語のとき. その補集合 $\overline{L}=\Sigma^*-L$ が正則である理由.

例. Lを受理する決定性有限オートマトンを $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ とするとき $\overline{L}$ は $M'=(Q, \Sigma, \delta, q_0, \overline{F})$ によって受理されるから。
(但し, $\overline{F}=Q-F$。)