第4回レポート解答 (2014/10/31出題分)

復習問題

1、正則表現の同値 $(X+Y)^* \equiv (X^* Y)^* X^*$ が成り立つことを(ざっくりと)説明せよ。

補題 言語 L, L', L'' について次が成り立つ.

- ○ $L \subseteq L'$ ならば
  - $L \cdot L'' \subseteq L' \cdot L''$.
  - $L'' \cdot L \subseteq L'' \cdot L'$.
  - $L^* \subseteq L'^*$.
- ○ $(L^*)^* = L^*$
- ○ $L^* \cdot L \subseteq L^*$
- ○ $L^* \cdot L^* = L^*$

定理2.6より $L((X+Y)^*) = L((X^* Y)^* X^*)$ を示せばよい。$L_1 = L(X)$, $L_2 = L(Y)$ とおく。

(i) $L((X+Y)^*) \subseteq L((X^* Y)^* X^*)$

$w \in L((X+Y)^*)$ とすると, $L((X+Y)^*) = (L_1 \cup L_2)^*$ より,

$w = w_1 w_2 \cdots w_n$ とおけて, $w_i \in L_1 \cup L_2$ $(1 \leq i \leq n)$ である.

① すべての i について, $w_i \in L_1$ のとき. $w \in L_1^* = L(X^*) = L(\varepsilon \cdot X^*) \subseteq L((X^* \cdot Y)^* \cdot X^*)$.

② ある i が存在して, $w_i \in L_2$ のとき, $w_i \in L_2$ となる i を小さい方から

$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$ $(m > 0)$ とおくと,

$$w = \underbrace{w_1 \cdots w_{i_1-1}}_{\in L_1^*} \underbrace{w_{i_1}}_{\in L_2} \underbrace{w_{i_1+1} \cdots w_{i_2-1}}_{\in L_1^*} \underbrace{w_{i_2}}_{\in L_2} w_{i_2+1} \cdots\cdots \underbrace{w_{i_m}}_{\in L_2} \underbrace{w_{i_m+1} \cdots w_n}_{\in L_1^*}$$

となるので $w \in (L_1^* \cdot L_2)^m \cdot L_1^* \subseteq (L_1^* \cdot L_2)^* \cdot L_1^* = L((X^* \cdot Y)^* \cdot X^*)$.

(ii) $L((X^* \cdot Y)^* X^*) \subseteq L((X+Y)^*)$

$$
\begin{aligned}
& L((X^* \cdot Y)^* \cdot X^*) \\
&= (L_1^* \cdot L_2)^* \cdot L_1^* \\
&\subseteq ((L_1 \cup L_2)^* \cdot (L_1 \cup L_2))^* \cdot (L_1 \cup L_2)^* \\
&\subseteq ((L_1 \cup L_2)^*)^* \cdot (L_1 \cup L_2)^* \\
&= (L_1 \cup L_2)^* \cdot (L_1 \cup L_2)^* \\
&= (L_1 \cup L_2)^* \\
&= L((X+Y)^*).
\end{aligned}
$$

//

注 もっとざっくり

「Yの文字を区切りとしてとらえる」

くらいでもよいです

予習問題

2. 図2.10のε-NFAに対して，ブール行列 Δ^{012} を与えよ。

ブール行列はNFAに対して定義されているので，まずはε-NFAをNFAに変換する。

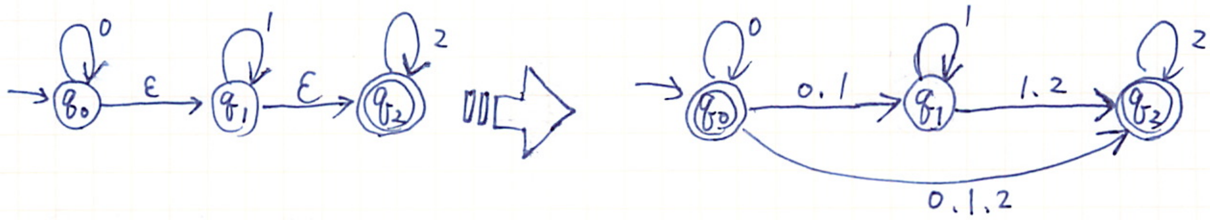

図2.10のε-NFA　　　　　　　　　NFA

$$\Delta^0 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} q_0 & q_1 & q_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \Delta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta^{012} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ //}$$

（また，DFAは明らかにNFAの特別な場合であるから，
図2.11のDFAから，ブール行列を求めてもよい。
この場合，状態数が4となるため，ブール行列も4×4行列となる）

3. 定理2.14の証明において，構成される M' が有限オートマトンであることを確かめよ。

DFA, $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対して，DFA $M'=(Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ は次のとおり。

［
- $Q' = \{(p, A) \mid p \in Q,\ A \in M(Q)\}$
- $q'_0 = (q_0, I)$　（I：単位行列）
- $F' = \{(p, A) \mid I_p A I_F^t = 1\}$.
- $\delta'((p, A), a) = (\delta(p, a),\ A\Delta)$
　$\left(\Delta = \sum_{a \in \Sigma} \Delta^a\right)$
］

$q'_0 \in Q'$, $F' \subseteq Q'$ は明らかである。

Q' が有限であることは，$|Q|$ が有限 かつ $|M(Q)| = 2^{|Q|^2}$ より，
　$|Q'| = |Q \times M(Q)| = |Q| \cdot 2^{|Q|^2}$ であることから従う。

状態 (p, A)，記号 a に対して，δ が関数であることから $\delta(p, a)$ は一意に定まる。
また，Δ はDFA, M に対して一意に定まるため，$A\Delta$ もまた一意に定まる。
従って，δ' は関数である。以上のことから，M' は確かに（決定性）有限オートマトンである。