形式言語理論レポート課題 第9回

問題 次の言語は文脈自由言語(CFL)でないことを示せ.

$$L = \{ a^n b^n c^i \mid i \neq n \}$$

証明 背理法: LはCFLであると仮定する.

NをOgdenの補題の定数とする.

$$z = a^N b^N c^{N+N!} \in L$$

で, 最初のNコのaの出現を特定位置としたものを考えると

Ogdenの補題より, 分割 $z = uvwxy$ であって

(1) vxはaを含む.
(2) $\forall n \geq 0 \quad uv^n wx^n y \in L$

なるものが存在する.

Lに入る語が, 必ずa, b, cがこの順でしか出現せず,

出現するa, bの数が等しいことと, 上の(2)より

v, xの各々は文字を1種類しか含まず,

vxに出現するaの数とbの数が等しいことが分かる.

これと(1)より $v = a^k, x = b^k \quad (1 \leq k \leq N)$

という形しかない. 一方, $n' = (N!/k) + 1$ とすると,

n'は自然数で

$$uv^{n'} wx^{n'} y = a^{N+N!} b^{N+N!} c^{N+N!} \notin L$$

だが, これは(2)に反する.

$\boxed{終}$

補足(1) 練習問題3.5(p76)の解答は間違っています

(具体的には解答5行目「vwxは第1ブロック0^Nに含まれている」がおかしい)

それに引きずられている解答がいくつかありました。

(2) 普通の(CFLの)pumping lemma(定理3.7(p.72))を使おうとして詰まっている/間違えている人がちらほら見られました。

今回のケースではこっちの定理では難しいです

実際、このLは非CFLだが定理3.7の結論を満たしている!

$N=4$とすると、

$z=a^n b^n c^i \quad (n \neq i,\ 2n+i \geq 2)$

について、n, iの大小関係に応じて

$(u,v,w,x,y) = (a^{n-1}, a, \varepsilon, b, b^{n-1}c^i)$

$(a^{n-2}, a^2, \varepsilon, b^2, b^{n-2}c^i)$

$(a^n b^n c^{i-1}, c, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$

$(a^n b^n c^{i-2}, c^2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$

のいずれかの分解を考えれば良いです。