（本当は）
情報科学科の宣伝

Hoare 論理による プログラム検証入門

蓮尾 一郎
東京大学理学部情報科学科 講師
http://www-mmm.is.s.u-tokyo.ac.jp/~ichiro

東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

プログラム検証： 最初の例

While ループのある プログラム

```
n := N;
k := 1;
while (n > 0) {
  k := k*n;
  n := n-1;
}
```

N の階乗 N! を
計算するプログラム

k	n
1	N
N	N-1
N*(N-1)	N-2
N*(N-1)*(N-2)	N-3
...	...
N*(N-1)*...*2	1
N*(N-1)*...*2*1	0

ループ脱出！
(n>0 でない)

本当に？

* 証明してみよう！
  * 数学的に厳密に
  * いろんなプログラムに使えるような，「スジのよい」方法で．できれば自動化
* プログラム検証 program verification
  * プログラムや計算機システムの正しさは重要．銀行，自動車，ロケット，セキュリティ，...

プログラム検証：「意味論的」証明

正しさの証明

```
n := N;
k := 1;
while (n > 0) {
  k := k*n;
  n := n-1;
}
```

N の階乗 N! を
計算するプログラム

主張：
実行後の k の値は N!

困難：
ループが何度回るかわからない

アイデア：
ループの前後で保存される性質
（ループ不変量）に注目

正しさの証明

```
n := N;
k := 1;
while (n > 0) {
  k := k*n;
  n := n-1;
}
```

k * (n!) = N!

アイデア：
ループの前後で保存される性質
（ループ不変量）に注目

	k	n
✔	1	N
✔	N	N-1
✔	N*(N-1)	N-2
✔	N*(N-1)*(N-2)	N-3
✔	...	...
✔	N*(N-1)*...*2	1
✔	N*(N-1)*...*2*1	0

正しさの証明

```
n := N;
k := 1;
while (n > 0) {
  k := k*n;
  n := n-1;
}
```

ループの前 ☺

ループの後 ☃

補題１：
k * (n!) = N! は確かにループ不変量.
すなわち，☺で成り立てば☃でも成り立つ.

ループ不変量：

k * (n!) = N!

証明：

ループの前と後の k, n の値をそれぞれ
k_{old}, n_{old} と k_{new}, n_{new} と書くと，

（仮定☺） $k_{old} * (n_{old}!) = N!$

（示したいこと） $k_{new} * (n_{new}!) = N!$

いま，

$k_{new} * (n_{new}!)$
$= (k_{old} * n_{old}) * ((n_{old} - 1)!)$ [k_{new}, n_{new}の定義より]
$= k_{old} * (n_{old}!)$
$= N!$ [仮定☺より]

よって成立. □

正しさの証明

```
n := N;
k := 1;
while (n > 0) {
  k := k*n;
  n := n-1;
}
```

ループの前 ☺

ループの後 ☃

補題１：
k * (n!) = N! は確かにループ不変量.
すなわち，☺で成り立てば☃でも成り立つ.

補題２：
k * (n!) = N! はループに入る前☺で成立.

ループ不変量：

k * (n!) = N!

証明：

n = N, k = 1 より明らか. □

正しさの証明

```
n := N;
k := 1;
while (n > 0) {
  k := k*n;
  n := n-1;
}
```

ループの前 ☺

ループの後 ☃

補題１：
k * (n!) = N! は確かにループ不変量.
すなわち，☺で成り立てば☃でも成り立つ.

補題２：
k * (n!) = N! はループに入る前☺で成立.

ループ不変量：

k * (n!) = N!

プログラムの正しさの証明：

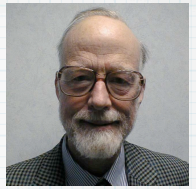
補題１，２より， k * (n!) = N! は
ループの実行前，実行中，実行後
全てで成立．ループの実行後は n=0 なので，k = N! でなければならない. □

証明の本質をとらえて，「機械化」

* 本質的な議論は単純？
  * 代入による値の書き換え
  * ループ不変量
* ... Hoare logic!

Hoare 論理：
プログラムの正しさを証明する「機械」

Hoare 論理



Sir Antony Hoare
(1934.1.11-)
Microsoft Research, Cambridge

* [Hoare, 1969]
* “Program logic” “Floyd-Hoare logic” とも呼ばれる.
* 関連： Dynamic logic, Kleene algebra with tests
* Hoare triple を導いていく体系

{A} P {B}

例：{ n=2 } n:=n+1 { n=3 }

実行前に成り立つ性質 “precondition”

プログラム

実行後に成り立つ性質 “postcondition”

Hoare 論理の「材料」

* プログラム意味論
  * プログラム ＝ メモリ状態の変換
* メモリ状態の性質を記述するための assertion language
* Hoare triple を導くための導出規則 （ルール）
  * 機械的な，文字列の書き換え

プログラム意味論

「意味論」とは？

* プログラムの「意味」は何か
  * 正確な答え：
    「実行した際の MacBook のメモリ状態の変化」
  * ➜ 細かすぎて「使えない」

```
n := N;
k := 1;
while (n > 0) {
  k := k*n;
  n := n-1;
}
```

* ここではメモリ状態を用いる
  * プログラミング言語による
    （宣言型言語だからメモリ状態を使う．たとえば関数型言語ならば関数として意味をつける）

メモリ状態

* 変数と値の対応の表のこと．

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} & \mapsto & \mathbf{2} \\ \mathrm{y} & \mapsto & \mathbf{13} \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

* 数学的には： 関数

$$\sigma : \mathbf{Var} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

プログラムの意味

* メモリ状態の変換として
  * つまり，関数 $\mathbf{MSt} \longrightarrow \mathbf{MSt} \cup \{\bot\}$

$\mapsto$ ：「変形する」「移す」

$$[\![\mathrm{x} := a]\!] : \quad \sigma \quad \longmapsto \quad \sigma\left[\mathrm{x} \mapsto [\![a]\!]\sigma\right]$$

プログラム x:=a の「意味」

メモリ状態，たとえば

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} & \mapsto & \mathbf{2} \\ \mathrm{y} & \mapsto & \mathbf{13} \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

アップデートされたメモリ状態．
x の値を，a を σ のもとで計算した値（たとえば $[\![\mathrm{y}+1]\!]\sigma = 14$ とか）にアップデート

x は変数，a は「数の表現」（たとえば y+1）

プログラムの意味

* メモリ状態の変換として
  * つまり，関数 $\mathbf{MSt} \longrightarrow \mathbf{MSt} \cup \{\bot\}$

$$[\![P_1; P_2]\!] : \quad \sigma \quad \longmapsto \quad [\![P_2]\!]([\![P_1]\!]\sigma)$$

まず P_1 によって変換

次に P_2 によって変換

P_1，P_2 はプログラム

プログラムの意味

* メモリ状態の変換として
  * つまり，関数 $\mathbf{MSt} \longrightarrow \mathbf{MSt} \cup \{\bot\}$

$$[\![\texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ P_1\ \texttt{else}\ P_2]\!] : \quad \sigma \longmapsto \begin{cases} [\![P_1]\!]\sigma & \text{if } [\![b]\!]\sigma \text{ is true} \\ [\![P_2]\!]\sigma & \text{if } [\![b]\!]\sigma \text{ is false} \end{cases}$$

P_1，P_2 はプログラム
b は「真偽表現」
（x > 0 とか）

プログラムの意味

「停止しない」

* メモリ状態の変換として
  * つまり，関数 $\mathbf{MSt} \longrightarrow \mathbf{MSt} \cup \{\bot\}$

$$[\![\texttt{while}\ b\ P]\!] : \quad \sigma \longmapsto ??$$

* 状態変換の繰り返し $[\![P]\!]^n\sigma$を考える：

$$\sigma,\ [\![P]\!]\sigma,\ \ [\![P]\!]([\![P]\!]\sigma),\ \ [\![P]\!]([\![P]\!]([\![P]\!]\sigma)),\ \ \ldots$$

  * ある時点で b が偽になれば，つまり $[\![b]\!]([\![P]\!]^n\sigma) = \text{false}$ なら，そうなるような最初の n に対する $[\![P]\!]^n\sigma$ を返す
  * b がずっと真であれば，⊥（未定義，非停止）

プログラムの意味論：まとめ

「停止しない」

* メモリ状態の変換として
  * つまり，関数 $\mathbf{MSt} \longrightarrow \mathbf{MSt} \cup \{\bot\}$

$$[\![\mathtt{x} := a]\!] : \quad \sigma \longmapsto \sigma[\mathtt{x} \mapsto [\![a]\!]\sigma]$$

$$[\![P_1; P_2]\!] : \quad \sigma \longmapsto [\![P_2]\!]([\![P_1]\!]\sigma)$$

$$[\![\texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ P_1\ \texttt{else}\ P_2]\!] : \quad \sigma \longmapsto \begin{cases} [\![P_1]\!]\sigma & \text{if } [\![b]\!]\sigma \text{ is true} \\ [\![P_2]\!]\sigma & \text{if } [\![b]\!]\sigma \text{ is false} \end{cases}$$

$$[\![\texttt{while}\ b\ P]\!] : \quad \sigma \longmapsto \ldots$$

ポイント：
* 数学的に厳密な定義
* 要素還元的（大きなプログラムの意味は，その部品の意味から決まる）

Hoare 論理の「材料」（思い出そう）

* プログラム意味論
  * プログラム ＝ メモリ状態の変換
* メモリ状態の性質を記述するための assertion language
* Hoare triple を導くための導出規則

Assertion Language

Assertion Language

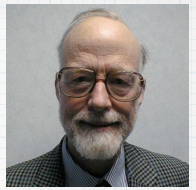
* Assertion: メモリ状態の性質を記述する「論理式」．例：
  * x = 5 ∧ y ≤ 3
  * ∃z. (x = 2 * z ∧ y = 3 * z)
* 本当ならば，言語（文法）をはっきり定めることが望ましい．たとえば：

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{AExp} \ni & a & ::= & x \mid n \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 * a_2 \\
\mathbf{Fml} \ni & A & ::= & \texttt{true} \mid \texttt{false} \mid A_1 \wedge A_2 \mid \neg A \mid a_1 < a_2 \mid \\
 & & & \forall x \in \mathbb{N}.\, A \quad \text{where } x \in \mathbf{Var}
\end{array}
$$

  * とくに，証明の形式化・自動化のためには必須
  * ここではやらない（時間がないから）

Hoare 論理の導出規則

Hoare 論理



Sir Antony Hoare
(1934.1.11-)
Microsoft Research, Cambridge

* [Hoare, 1969]
* “Program logic” “Floyd-Hoare logic” とも呼ばれる．
* 関連： Dynamic logic, Kleene algebra with tests
* Hoare triple を導いていく体系

{A} P {B}

例：{ n=2 } n:=n+1 { n=3 }

実行前に成り立つ性質 “precondition”

プログラム

実行後に成り立つ性質 “postcondition”

Hoare Triple の意味論

実行前に成り立つ性質 “precondition” を表す assertion

実行後に成り立つ性質 “postcondition” を表す assertion

{A} P {B}

プログラム

* 「{A} P {B} が真」であるとは,
  * assertion A をみたす任意のメモリ状態 σ について,
  * メモリ状態 ⟦P⟧σ が assertion B をみたすことをいう.

実行後のメモリ状態

Partial Correctness

{A} P {B}

* 「{A} P {B} が真」であるとは,
  * assertion A をみたす任意のメモリ状態 σ について,
  * メモリ状態 ⟦P⟧σ が assertion B をみたすことをいう.

⊥ だったらどうする？

* 「⊥ はすべての assertion をみたす」と約束.
  * ➜ P が停止しないときに関しては，何も保証してくれない （“partial correctness”）
  * そもそも「P が停止するか？」はとても難しい問題. 決定不能！（判定してくれるプログラムは存在しない）

真な Hoare Triple の例

{ x=2 } x:=x+1 { x=3 }

{ x=2 } x:=x+1; y:=x { y=3 }

{ } if x>0 then x:=x-1 else x:=0 { x≥0 }

{ x>0 } while x>0 {y:=x} { x=x+1 }

停止しないので

postcondition が何であっても，この Hoare triple は真

Hoare 論理の導出規則

規則の読み方：「上の仮定が成立していれば，下の結論も成立」（この規則では仮定はなし）

$$\frac{}{\{A[a/x]\}\ x:=a\ \{A\}}\ (\text{Assign})$$

assertion A において，変数 x を a に書き換えたもの

規則の名前（assignment = 「値の割り当て」）

* 結論 {A[a/x]} x:=a {A} は，右から左に読むとよい.
  * 「x:=a の後に A が成り立つためには，実行前には A[a/x] が成り立たないといけない」

Hoare 論理の導出規則

規則の読み方：
「上の仮定が成立していれば，下の結論も成立」
（この規則では仮定はなし）

$$\frac{}{\{A[a/x]\}\ x:=a\ \{A\}}\ (\text{Assign})$$

assertion A において，変数 x を a に書き換えたもの

規則の名前
（assignment = 「値の割り当て」）

* 例：

$$\frac{}{\{y=2\}\ x:=y\ \{x=2\}} \qquad \frac{}{\{x-1=2\}\ x:=x-1\ \{x=2\}}$$

$$\frac{}{\{k*((n-1)!)=N! \wedge n-1\geq 0\}\ n:=n-1\ \{k*(n!)=N! \wedge n\geq 0\}}$$

Hoare 論理の導出規則

規則の読み方：
「上の仮定が成立していれば，下の結論も成立」

$$\frac{\{A\}\ P_1\ \{C\} \quad \{C\}\ P_2\ \{B\}}{\{A\}\ P_1; P_2\ \{B\}}\ (\text{SeqComp})$$

規則の名前
（sequential composition = 「逐次合成」）

* （もう一回言っておく）次のように読む．
  * 規則は上から下に　（上が成り立てば下が成り立つ）
    * 証明を探すときは逆（下が成り立つためには，どんな上が成り立てばいい？）
  * Hoare triple は右から左に
    （postcondition が成り立つためには．．．）

Hoare 論理の導出規則

規則の読み方：
「上の仮定が成立していれば，下の結論も成立」

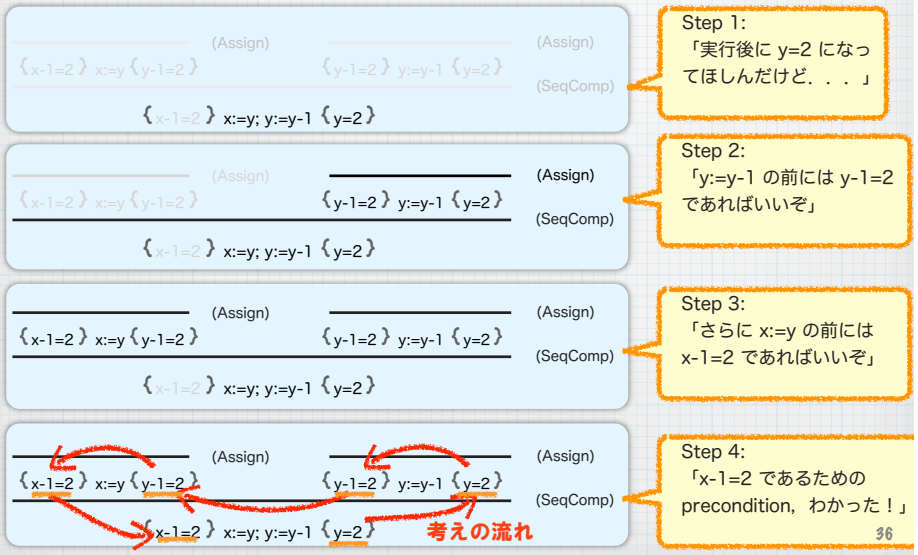
$$\frac{\{A\}\ P_1\ \{C\} \quad \{C\}\ P_2\ \{B\}}{\{A\}\ P_1; P_2\ \{B\}}\ (\text{SeqComp})$$

規則の名前
（sequential composition = 「逐次合成」）

* 例：

$$\dfrac{\dfrac{}{\{x-1=2\}\ x:=y\ \{y-1=2\}}\ (\text{Assign}) \quad \dfrac{}{\{y-1=2\}\ y:=y-1\ \{y=2\}}\ (\text{Assign})}{\{x-1=2\}\ x:=y;\ y:=y-1\ \{y=2\}}\ (\text{SeqComp})$$

さっきの例，くわしく！！



Hoare 論理の導出規則

規則の読み方：
「上の仮定が成立していれば，下の結論も成立」

$$\frac{\{A\}\ P_1\ \{C\} \qquad \{C\}\ P_2\ \{B\}}{\{A\}\ P_1; P_2\ \{B\}}\ (\text{SeqComp})$$

規則の名前
（sequential composition = 「逐次合成」）

* 例：

$$\frac{\{k*n*((n-1)!)=N! \wedge n-1\geq 0\}\ k:=k*n\ \{k*((n-1)!)=N! \wedge n-1\geq 0\} \qquad \{k*((n-1)!)=N! \wedge n-1\geq 0\}\ n:=n-1\ \{k*(n!)=N! \wedge n\geq 0\}}{\{k*n*((n-1)!)=N! \wedge n-1\geq 0\}\ k:=k*n;\ n:=n-1\ \{k*(n!)=N! \wedge n\geq 0\}}\ (\text{SeqComp})$$

Hoare 論理の導出規則

$$\frac{\{A \wedge b\}\ P_1\ \{B\} \qquad \{A \wedge \neg b\}\ P_2\ \{B\}}{\{A\}\ \text{if b then } P_1 \text{ else } P_2\ \{B\}}\ (\text{If})$$

* 例：

$$\frac{\{x\geq 0 \wedge x>0\}\ x:=x-1\ \{x\geq 0\} \qquad \{x\geq 0 \wedge \neg (x>0)\}\ x:=x\ \{x\geq 0\}}{\{x\geq 0\}\ \text{if } x>0 \text{ then } x:=x-1 \text{ else } x:=x\ \{x\geq 0\}}\ (\text{If})$$

Hoare 論理の導出規則

A はループ不変量！

$$\frac{\{A \wedge b\}\ P_1\ \{A\}}{\{A\}\ \text{while b } P_1\ \{A \wedge \neg b\}}\ (\text{While})$$

ループを脱出した ➜
b は成立しないはず

* 例：

$$\frac{\{x\geq 0 \wedge x>0\}\ x:=x-1\ \{x\geq 0\}}{\{x\geq 0\}\ \text{while } x>0\ (\ x:=x-1\ )\ \{x\geq 0 \wedge \neg(x>0)\}}\ (\text{While})$$

Hoare 論理の導出規則

A はループ不変量！

$$\frac{\{A \wedge b\}\ P_1\ \{A\}}{\{A\}\ \text{while b } P_1\ \{A \wedge \neg b\}}\ (\text{While})$$

ループを脱出した ➜
b は成立しないはず

* 例：

$$\frac{\{k*(n!)=N! \wedge n>0\}\ k:=k*n;\ n:=n-1\ \{k*(n!)=N!\}}{\{k*(n!) = N!\}\ \text{while } (n>0)\ k:=k*n;\ n:=n-1\ \{k*(n!)=N! \wedge n=0\}}\ (\text{While})$$

Hoare 論理の導出規則

$$\frac{A \Rightarrow A' \quad \{A'\}\ P\ \{B'\} \quad B' \Rightarrow B}{\{A\}\ P\ \{B\}}\ (\text{Conseq})$$

仮定：「A が成り立てば，必ず A' も成り立つ」

規則の名前（consequence = 「（論理的）帰結」）

* 例：

$$\frac{x>0 \Rightarrow (x \geq 0 \wedge x>0) \quad \{x \geq 0 \wedge x>0\}\ x:=x-1\ \{x \geq 0\}}{\{x>0\}\ x:=x-1\ \{x \geq 0\}}\ (\text{Conseq})$$

Hoare 論理の導出規則

$$\frac{A \Rightarrow A' \quad \{A'\}\ P\ \{B'\} \quad B' \Rightarrow B}{\{A\}\ P\ \{B\}}\ (\text{Conseq})$$

仮定：「A が成り立てば，必ず A' も成り立つ」

規則の名前（consequence = 「（論理的）帰結」）

$$\frac{k*(n!)=N! \wedge n>0 \Rightarrow k*n*((n-1)!)=N! \wedge n-1 \geq 0 \quad \{k*n*((n-1)!)=N! \wedge n-1 \geq 0\}\ k:=k*n;\ n:=n-1\ \{k*(n!)=N! \wedge n \geq 0\} \quad k*(n!)=N! \wedge n \geq 0 \Rightarrow k*(n!)=N!}{\{k*(n!)=N! \wedge n>0\}\ k:=k*n;\ n:=n-1\ \{k*(n!)=N!\}}\ (\text{Conseq})$$

Hoare 論理の導出規則（まとめ）

$$\frac{}{\{A[a/x]\}\ x:=a\ \{A\}}\ (\text{Assign})$$

$$\frac{\{A\}\ P_1\ \{C\} \quad \{C\}\ P_2\ \{B\}}{\{A\}\ P_1; P_2\ \{B\}}\ (\text{SeqComp})$$

$$\frac{\{A \wedge b\}\ P_1\ \{B\} \quad \{A \wedge \neg b\}\ P_2\ \{B\}}{\{A\}\ \text{if } b \text{ then } P_1 \text{ else } P_2\ \{B\}}\ (\text{If})$$

$$\frac{\{A \wedge b\}\ P_1\ \{A\}}{\{A\}\ \text{while } b\ P_1\ \{A \wedge \neg b\}}\ (\text{While})$$

Hoare 論理の導出規則（まとめ，つづき）

$$\frac{A \Rightarrow A' \quad \{A'\}\ P\ \{B'\} \quad B' \Rightarrow B}{\{A\}\ P\ \{B\}}\ (\text{Conseq})$$

Hoare 論理における導出

Hoare 論理の導出

* たとえば，次の Hoare triple を証明したい．

$\{ k=1 \wedge n=N \}$ while (n>0) k:=k*n; n:=n-1 $\{ k = N! \}$

* 「意味論的立場」
  * 「{A} P {B} が真」であるとは，
  * assertion A をみたす任意のメモリ状態 σ について，
  * メモリ状態 $[\![P]\!]\sigma$ が assertion B をみたすことをいう．
* 直接の証明
  * 「数学の証明」，頭を使う．
  * ➜ 自動化できない！

* 「構文論的立場」
  * Hoare 論理の導出規則を繰り返し使って，仮定なしの「導出木」（「証明木」）が作れればOK！
  * 記号操作，証明「検索」
  * ➜ 自動化！

Hoare 論理の導出

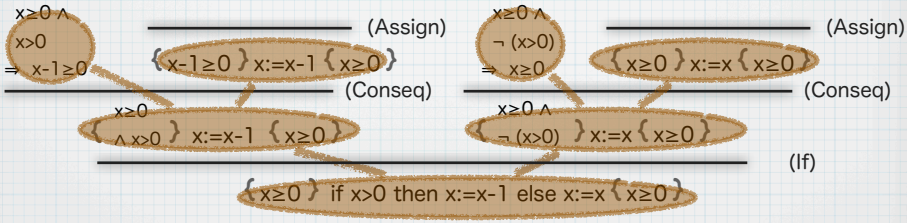
$$\dfrac{\dfrac{x\geq 0 \wedge x>0 \Rightarrow x-1\geq 0 \quad \{x-1\geq 0\}\, x:=x-1\, \{x\geq 0\}}{\{x\geq 0 \wedge x>0\}\, x:=x-1\, \{x\geq 0\}}\,(\text{Conseq}) \quad \dfrac{x\geq 0 \wedge \neg(x>0) \Rightarrow x\geq 0 \quad \{x\geq 0\}\, x:=x\, \{x\geq 0\}}{\{x\geq 0 \wedge \neg(x>0)\}\, x:=x\, \{x\geq 0\}}\,(\text{Conseq})}{\{x\geq 0\}\ \text{if } x>0 \text{ then } x:=x-1 \text{ else } x:=x\ \{x\geq 0\}}\,(\text{If})$$

(Assign) (Assign)

Hoare 論理の導出

木！！

（導出木，証明木）



Hoare 論理の導出

* たとえば，次の Hoare triple を証明したい．

$$\{ k=1 \wedge n=N \}\ \text{while } (n>0)\ k:=k*n;\ n:=n-1\ \{ k = N! \}$$

* 「意味論的立場」
  * 「 {A} P {B} が真」であるとは，
  * assertion A をみたす任意のメモリ状態 σ について，
  * メモリ状態 $[\![P]\!]\sigma$ が assertion B をみたすことをいう．
* 直接の証明
  * 「数学の証明」，頭を使う．
    ➜ 自動化できない！

* 「構文論的立場」
  * Hoare 論理の導出規則を繰り返し使って，仮定なしの「導出木」（「証明木」）が作れればOK！
  * 記号操作，証明「検索」
    ➜ 自動化！

健全性，完全性

* 意味論と構文論のせめぎあい！！
  （導出規則＝構文論＝「機械」）
  * 健全性 soundness: 導出規則で導かれる Hoare triple は，すべて真
    * 「ウソは言わない」
    * 「証明能力が高すぎない」
    * この性質は必須．（ウソをつかれると困る）
  * 完全性 completeness: 真であるHoare triple は，すべて導出規則で導ける
    * 「真なことはすべて言ってくれる」
    * 「証明能力が十分高い」
    * これは成り立たない場合も多い（仕方ない．不完全性定理）

健全性，完全性

* Hoare 論理は
  * 健全性を満たす．
  * 相対完全性 relative completeness を満たす．
    * 相対完全性 ＝ 「条件付き」完全性
    * 条件付きでない，フルの完全性は，Gödel の不完全性定理により排除される．

例： 階乗の計算

はじめの例

```
n := N;
k := 1;
while (n > 0) {
  k := k*n;
  n := n-1;
}
```

主張：
実行後の k の値は N!

N の階乗 N! を
計算するプログラム

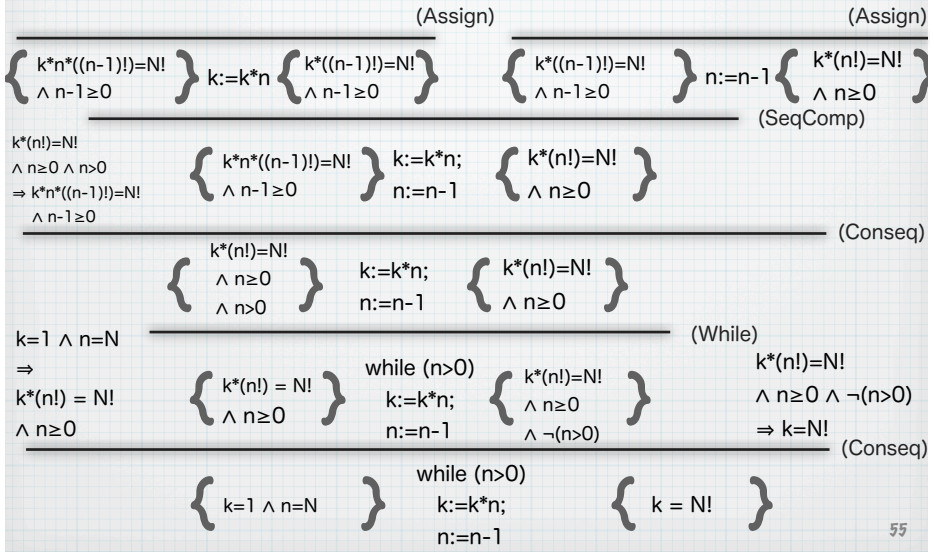
この証明を，Hoare 論理を使ってシステマティックに！
（構文論的・機械的な，記号書き換えによる証明）

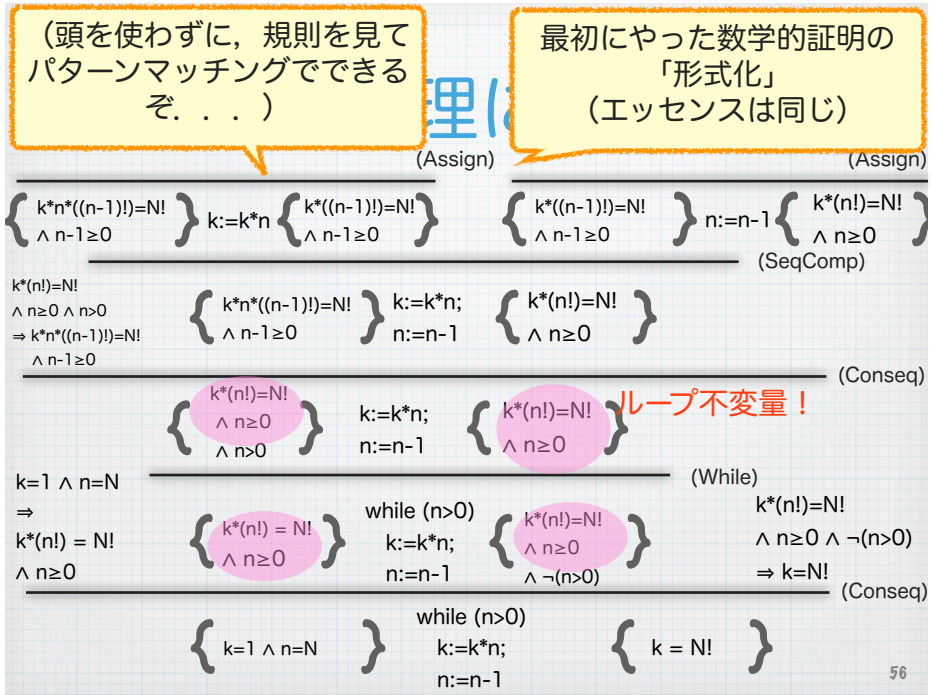
Hoare 論理による証明

* 目標： 次の Hoare triple の導出

{ k=1 ∧ n=N } while (n>0) k:=k*n; n:=n-1 { k = N! }

Hoare 論理による証明





参考文献

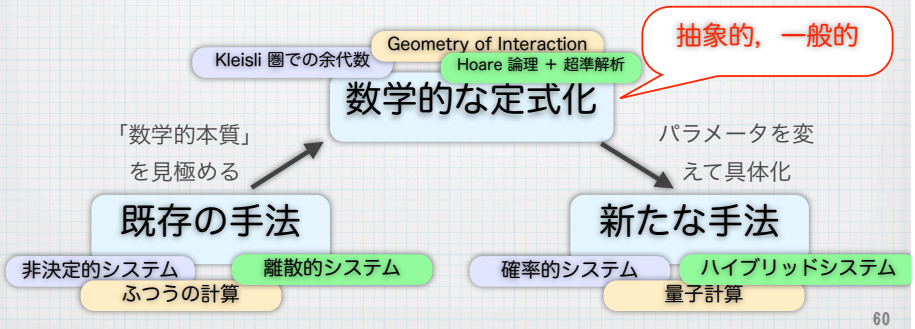
* G. Winskel, The Formal Semantics of Programming Languages: An Introduction. The MIT Press, ISBN 0-262-23169-7

自己紹介

* 蓮尾 一郎 （はすお・いちろう）
  * BSc（東大数学，2002）
    MSc（東工大情報，2004）
    PhD（U. Nijmegen, 2008）
  * 京都大学数理解析研究所 助教（2007-2011）
    東京大学理学部情報科学科 講師（2011-）
  * 専門分野： 数学と計算機科学を行ったり来たり
    * 理学部情報科学科での立ち位置：
      * 応用 vs. 理論
      * 速度 vs. 正しさ
  * http://www-mmm.is.s.u-tokyo.ac.jp/~ichiro

研究テーマ

* 抽象数学をつかって，情報科学の新パラダイムに斬り込む
  * 特に： 圏論，数理論理学，代数学，幾何学



メッセージ

* 情報科学と数学のインタラクション，おもしろいよ！
  * そもそもコンピュータは数学（数学基礎論）から生まれた

お待ちかね：レポート課題

レポート課題

1. 次の４つの Hoare triple について，真であるかどうか判定せよ．（証明・反例があればなおよい）

$\{ x=3 \}\ x:=y\ \{ y=3 \}$

$\{ y=2 \}\ x:=y+1;\ y:=x\ \{ x=3 \}$

$\{ \}\ \texttt{if } x \geq 0 \texttt{ then } x:=x-1 \texttt{ else } x:=0\ \{ x \geq 0 \}$

$\{ X \geq 0 \}$

```
y:=0; x:=X;
while (x>100) {
  y:=y+1;
  x:=x-100
}
```

$\{ 0 \leq x < 100 \wedge 100*y + x = X \}$

気持ち： X セントを「y ドル x セント」に変換するプログラム

レポート課題

2. 次の2つのHoare triple に対して，Hoare 論理の導出木を与えよ．ただし x, n,m は整数(int)型の変数とする．

$\{ x \geq 0 \}$ if x>0 then x:=x-1 else x:=x $\{ x \geq 0 \}$

ヒント： 38 ページのルールの適用（まだ仮定が残ってる！）を完成させる．

$\{ \exists m\ (m \geq 0 \wedge n=2*m) \}$ while (n>0) { n:=n-2} $\{ n=0 \}$

「n は負でない偶数」

レポート課題

3. [Hoare 論理とは関係ない算数の問題]
   2つの正の整数 m, n （ただし m > n）について，

   GCD(m, n) = GCD(m - n, n)

   であることを示せ．ただし，GCD(m, n) は m と n の最大公約数を表す．

レポート課題

4. 正の整数X, Y の最大公約数を計算するための，次のプログラム P を考える（ユークリッドの互除法）．

```
x:=X;  y:=Y;
while (x≠y) {
  if x≥y
    then x:=x-y
    else y:=y-x
}
```

ヒント：

- 55ページを参考に．
- レポート課題の問題３を使う．
- ループ不変量は，

  x>0 ∧ y>0 ∧ GCD(x,y)=GCD(X,Y)

次の Hoare triple の，Hoare 論理における導出木を与えよ．

{ X>0 ∧ Y>0 } P { x=y=GCD(X,Y) }

念のため

- 全問解かなくても大丈夫だが，たくさん解いたほうがよい（当たり前）
- コピーはダメ！
  - 東北大学 小林直樹先生のページを参照
    http://www.kb.ecei.tohoku.ac.jp/~koba/report.html
  - 盗作と判断された場合には，深刻な結果に至る場合があります．
    - たとえば，法学部では一発退学