

Le modèle de Cucker-Smale

Émergence et formation de structures et de motifs dans les groupes (troupeaux, bancs, colonies, nuées)

Jérémy DUBUT & Clovis EBERHART

31 mai 2011

Table des matières

1	Introduction	2
2	Résultats théoriques	3
2.1	Preuve de <i>flocking</i> pour les systèmes d'inégalités différentielles dissipatives (SDDI) .	3
2.2	Application au modèle CS-classic	4
2.3	Cas d'une zone d'influence	6
2.4	Cas d'une influence "triangulaire"	6
2.5	Remarque sur la preuve originale de <i>flocking</i>	7
3	Simulations	8
3.1	Illustrations des résultats théoriques	8
3.2	Exemple de non- <i>flocking</i>	9
3.3	Problème du mur circulaire	9
3.4	Ajout de bruit aléatoire	10
4	Description cinétique du modèle CS	12
4.1	Passage aux EDP	12
4.2	Particules cinétique et méthode de Monte-Carlo	13
5	Conclusion	15
A	Résultats de théorie des graphes	16
A.1	Propriétés de base du laplacien	16
A.2	Connexité et valeur propre 0	17
A.3	Cas d'un graphe complet	17
A.4	Minoration du nombre de Fiedler d'un graphe connexe	18
B	Convergence des schémas numériques	20
B.1	Théorème général	20
B.2	Convergence des RKp pour le modèle CS	21

1. Introduction

Les mouvements collectifs dans des groupes d'individus autonomes apparaissent dans de nombreux domaines : en biologie (nuées d'oiseaux, bancs de poissons, colonies de bactéries, ...) mais aussi en physique (pour modéliser le plasma par exemple) [10]. On peut donner à ces mouvements collectifs la définition suivante :

Définition 1 (Mouvement collectif). *Dans un système constitué de nombreuses entités similaires, sous certaines conditions, ces entités peuvent adopter un comportement collectif presque entièrement déterminé par les effets imposés par les autres entités du système.*

Nous parlerons souvent de *flocking*, c'est-à-dire que les individus (dans notre cas, on considérera un groupe de N oiseaux) atteignent un consensus dans le sens où ils tendent à avoir la même vitesse et à conserver le groupe. Plus formellement, si au temps t , l'oiseau i est à la position $x_i(t)$, avec la vitesse $v_i(t)$ et si on note $x_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$ alors :

Définition 2 (*Flocking*). *On dit qu'il y a flocking quand les oiseaux alignent leurs vitesses :*

$$\exists v_{lim} \text{ telle que } \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \|v_i(t) - v_{lim}\|^2 = 0$$

et qu'ils forment un groupe :

$$\sup_{0 \leq t < +\infty} \sum_{i=1}^N \|x_i(t) - x_c(t)\|^2 < +\infty$$

L'idée de Cucker et Smale est la suivante : pour atteindre un consensus les oiseaux ont tendance à moyenner leur vitesse par rapport à celle des autres. De plus, l'*influence* des autres oiseaux diminue avec leur distance. Ils en sont arrivés à un système d'équations :

Définition 3 (Modèle CS-classic).

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i(t) \\ \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(\|x_i(t) - x_j(t)\|)(v_j(t) - v_i(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

où ψ est une fonction mesurable décroissante strictement positive. Dans la suite, on considérera $\psi(s) = \frac{\alpha}{(1 + s^2)^{\beta/2}}$.

petite annonce du plan et de l'objectif du stage

2. Résultats théoriques

2.1 Preuve de *flocking* pour les systèmes d'inégalités différentielles dissipatives (SDDI)

La plupart des résultats théoriques que nous allons présenter vont se réduire à la convergence des SDDI ([5]) à l'aide des fonctions de Lyapunov.

Définition 4 (SDDI et fonctions de Lyapunov associées). *Les inégalités suivantes forment un système d'inégalités différentielles dissipatives :*

$$\left| \frac{dX}{dt} \right| \leq V, \quad \frac{dV}{dt} \leq -\phi(X)V \quad (2.1)$$

où (X, V) sont positives et ϕ positive, mesurable et décroissante.

A ce système, on peut naturellement associer les fonctions de Lyapunov :

$$\xi_{\pm}(X, V) = V \pm \Phi(X)$$

avec $\Phi'(s) = \phi(s)$, $s \geq 0$.

L'intuition liée à ce système est qu'il perd de l'énergie au cours du temps et nous allons démontrer que, sous certaine condition, V tend vers 0 et X reste borné.

Lemme 1. *Supposons que (X, V) vérifie (2.1). Alors :*

$$(i) \quad \forall t \geq 0, \quad \xi_{\pm}(X(t), V(t)) \leq \xi_{\pm}(X_0, V_0)$$

$$(ii) \quad \forall t \geq 0, \quad V(t) + \left| \int_{X_0}^{X(t)} \phi(s) ds \right| \leq V_0$$

Démonstration. (i) par (2.1),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \xi_{\pm}(X(t), V(t)) &= \frac{d}{dt} (V(t) \pm \Phi(X(t))) \\ &= \frac{dV}{dt} \pm \phi(X(t)) \frac{dX}{dt} \\ &\leq \phi(X(t)) \left(-V(t) \pm \frac{dX}{dt} \right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

(ii) par (i),

$$V(t) - V_0 \leq -(\Phi(X(t)) - \Phi(X_0)), \quad V(t) - V_0 \leq (\Phi(X(t)) - \Phi(X_0))$$

donc, on en déduit que,

$$V(t) - V_0 \leq -|\Phi(X(t)) - \Phi(X_0)| = - \left| \int_{X_0}^{X(t)} \phi(s) ds \right|$$

□

On en déduit directement :

Théorème 1. *Supposons que (X, V) vérifie (2.1). Si $V_0 < \int_{X_0}^{+\infty} \phi(s)ds$, alors $\exists x_M \geq 0$ tel que*

$$V_0 = \int_{X_0}^{x_M} \phi(s)ds, \quad X(t) \leq x_M, \quad V(t) \leq V_0 e^{-\phi(x_M)t}, \quad t \geq 0$$

Démonstration. Comme ϕ est une fonction positive mesurable, alors la fonction

$$F : \delta \geq 0 \mapsto \int_{X_0}^{\delta} \phi(s)ds$$

est croissante et continue.

Comme $F(X_0) = 0$ et $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} F(\delta) > V_0$, on peut poser x_M , la plus grande valeur telle que

$$V_0 = F(x_M)$$

Or, par le lemme 1, $\forall t \geq 0$, $F(X(t)) \leq V_0$. Donc, si $\exists T$ tel que $X(T) > x_M$ alors on aurait $F(X(T)) > F(x_M) = V_0$ par croissance de F et par définition de x_M , ce qui serait absurde. Ainsi, $\forall t \geq 0$,

$$X(t) \leq x_M$$

Ensuite, par décroissance de ϕ et (2.1), $\frac{dV}{dt} \leq -\phi(x_M)V$ donc par le lemme de Grönwall,

$$V(t) \leq V_0 e^{-\phi(x_M)t}$$

□

2.2 Application au modèle CS-classic

La première étape est de réduire 1.1 à 2.1. Tout d'abord, réécrivons le système 1.1. Notons $x = (x_1, \dots, x_N)$ et $v = (v_1, \dots, v_N)$. Observons que si $x_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$ et $v_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i(t)$ et que si (x, v) est solution de (1.1) alors $(x_1 - x_c, \dots, x_N - x_c, v_1 - v_c, \dots, v_N - v_c)$ l'est aussi. Donc, on peut supposer sans perte de généralité que $x_c = v_c = 0$. Posons $A(x) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} = (\frac{\lambda}{N} \psi(\|x_i - x_j\|))_{1 \leq i,j \leq N}$, la matrice d'influence et $L(x) = \text{diag} \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} \right)_{1 \leq i \leq N} \right) - A(x)$, son laplacien. Alors, (1.1) se réécrit en :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v(t) \\ \frac{dv}{dt} = -L(x(t))v(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Lemme 2. *Si (x, v) vérifie (2.2) alors $(\|x\|, \|v\|)$ vérifie (2.1) avec $\phi(s) = \lambda \psi(2s)$.*

Démonstration. Tout d'abord, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\pm 2\|x\| \frac{d\|x\|}{dt} = \pm \frac{d\|x\|^2}{dt} = \pm 2 \left\langle \frac{dx}{dt}, x \right\rangle = \pm 2\langle v, x \rangle \leq 2\|x\|\|v\|$$

Ensuite, notons que par symétrie de $A(x)$,

$$\langle L(x)v, v \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} a_{i,j} \|v_i - v_j\|^2$$

Donc,

$$2\|v\| \frac{d\|v\|}{dt} = \frac{d\|v\|^2}{dt} = -2\langle L(x)v, v \rangle = - \sum_{i \neq j} a_{i,j} \|v_i - v_j\|^2 \leq -\frac{\lambda}{N} \psi(2\|x\|) \sum_{i \neq j} \|v_i - v_j\|^2$$

car ψ est décroissante et $\forall i, j, \|x_i - x_j\| \leq 2\|x\|$. Or, on observe que

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \|v_i - v_j\|^2 = \langle \bar{L}v, v \rangle$$

où $\bar{L}$ est le laplacien de la matrice qui n'a que des 1. De plus, comme $v_c = 0$ alors $\langle \bar{L}v, v \rangle \geq N\|v\|^2$ car N est la plus petite valeur propre de $\bar{L}$ sur l'ensemble des v de moyenne nulle et $\bar{L}$ est symétrique (voir annexe A). Donc, on en déduit le résultat. $\square$

La deuxième étape est de vérifier que l'on est bien dans les hypothèses du théorème 1. En réalité cela dépendra de β . Pour cela :

Lemme 3. (i) si $\beta \neq 1$, $\int_a^b \phi(s)ds \geq \frac{\lambda\alpha}{2(\beta-1)} [(1 + (2s)^2)^{\frac{1-\beta}{2}}]_a^b$
(ii) si $\beta = 1$, $\int_a^b \phi(s)ds = \frac{\lambda\alpha}{2} [\ln(2s + \sqrt{1 + (2s)^2})]_a^b$

Finalement, on en déduit :

Théorème 2. Soit (x, v) une solution de (2.2). Alors :

(i) si $\beta \in [0, 1[$, $\exists x_M$ tel que

$$(1 + (2x_M)^2)^{\frac{1-\beta}{2}} = (1 + (2\|x_0\|)^2)^{\frac{1-\beta}{2}} + \frac{2(1-\beta)}{\alpha\lambda} \|v_0\|$$

(ii) si $\beta = 1$, $\exists x_M$ tel que

$$2x_M + \sqrt{1 + (2x_M)^2} = (2\|x_0\| + \sqrt{1 + (2\|x_0\|)^2}) e^{\frac{2\|v_0\|}{\lambda\alpha}}$$

(iii) si $\beta > 1$ et si $(1 + (2\|x_0\|)^2)^{\frac{1-\beta}{2}} > \frac{4(\beta-1)}{\lambda\alpha} \|v_0\|$, $\exists x_M$ tel que

$$(1 + (2x_M)^2)^{\frac{\beta-1}{2}} = ((1 + (2\|x_0\|)^2)^{\frac{1-\beta}{2}} - \frac{2(\beta-1)}{\alpha\lambda} \|v_0\|)^{-1}$$

Dans tous les cas,

$$\|x(t)\| \leq x_M, \|v(t)\| \leq \|v_0\| e^{-\phi(x_M)t}$$

Démonstration. Pour les cas (i) et (ii), par le lemme 3, on a que $\int_{\|x_0\|}^{+\infty} \phi(s)ds = +\infty$ donc on applique directement le théorème 1.

Pour le cas (iii), il faut ajouter l'hypothèse que $\|v_0\| < \int_{\|x_0\|}^{+\infty} \phi(s)ds$.

Dans tous les cas, les formules qui permettent de définir x_M viennent du théorème 1 et du fait que $\|v_0\| = \int_{\|x_0\|}^{x_M} \phi(s)ds$. $\square$

On en déduit que si $\beta \in [0, 1]$, alors on a *flocking* inconditionnel et si $\beta > 1$, alors on a *flocking* sous certaines conditions sur les conditions initiales.

2.3 Cas d'une zone d'influence

Ici, nous allons considérer un modèle un peu plus général où la matrice A restera symétrique mais pourra avoir des coefficients nuls. L'idée est de voir si les résultats théoriques sont conservés si on se restreint à l'influence de seulement les oiseaux les plus proches.

Définition 5 (Modèle CS-symétrique).

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i(t) \\ \frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N m_{i,j}(t) \psi(\|x_i(t) - x_j(t)\|) (v_j(t) - v_i(t)) \end{cases} \quad (2.3)$$

où ψ est une fonction mesurable décroissante strictement positive et $\forall i, j, m_{i,j}(t) \in \{0, 1\}$ et $m_{i,j}(t) = m_{j,i}(t)$.

Comme précédemment, on définit $A = (m_{i,j} \frac{\lambda}{N} \psi(\|x_i - x_j\|))_{1 \leq i, j \leq N}$ et L son laplacien. On définit également $M(t) = (m_{i,j}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$. On remarque que $M(t)$ est alors la matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté. Appelons-le $G(M(t))$. On se ramène donc au cas précédent avec :

Lemme 4. Si (x, v) vérifie (2.2) (avec la nouvelle définition de L) et si $\forall t, G(M(t))$ est connexe alors $(\|x\|, \|v\|)$ vérifie (2.1) avec $\phi(s) = \frac{4\lambda}{N^2(N-1)} \psi(2s)$.

Démonstration. La seule différence avec le lemme 2 est que $\bar{L}$ est le laplacien de $M(t)$. Par un argument de théorie des graphes (voir annexe A), comme $G(M(t))$ est connexe, on minore la plus petite valeur propre de $\bar{L}$ sur l'ensemble des v de moyenne nulle par $\frac{4}{N(N-1)}$, ce qui nous permet de conclure. $\square$

Ainsi, nous obtenons un résultat semblable au théorème 2, en remplaçant λ par $\frac{4\lambda}{N^2(N-1)}$.

2.4 Cas d'une influence "triangulaire"

Ici, nous allons considérer un système un peu différent. En effet, on reprend les notations de (2.3) sauf que l'on considère que $M(t)$ est triangulaire inférieure. L'idée derrière ce modèle est que l'on considère une hiérarchie sur les oiseaux : chaque individu règle sa vitesse uniquement à partir des oiseaux plus haut dans la hiérarchie. Nous allons présenter une preuve de *flocking* inconditionnel pour $\beta \leq 1$. La condition $G(M(t))$ connexe est conservée : elle se traduit par le fait que $\forall i > 1, \exists j < i$ tel que $m_{i,j} \neq 0$ donc que tous les coefficients diagonaux de L sauf le premier sont non nuls.

Tout d'abord, on observe que si $(x, v) = ((x_1, \dots, x_N), (v_1, \dots, v_N))$ est solution alors $(x - x_1, v - v_1)$ l'est aussi donc on peut supposer que $v_1(t) = 0$ et $x_1(t) = 0$. On observe également que le problème restreint aux i premiers oiseaux est indépendant et que si $G(M)$ est connexe alors le graphe de la matrice M restreinte aux i premières lignes et colonnes l'est aussi donc on va pouvoir utiliser un raisonnement par récurrence.

Théorème 3. Si (x, v) vérifie (2.2) (dans le cas où M est triangulaire et $\beta \leq 1$) et si $\forall t, G(M(t))$ est connexe alors $\exists x_M \geq 0, \delta \geq 0$ et $\gamma > 0$ tels que $\|x(t)\| \leq x_M$ et $\|v(t)\| \leq \delta e^{-\gamma t}$.

Démonstration. On note $\|x\|_i = \|(x_1, \dots, x_i)\|$.

Montrons ce théorème par récurrence sur $1 \leq i \leq N$.

- si $i = 1$, $\|x\|_1 = 0$ et $\|v\|_1 = 0$ donc on prend $x_M = 0$, $\delta = 0$ et $\gamma = r > 0$ (ie qu'on peut prendre γ strictement positif et aussi grand que l'on veut).
- par HR $\|v\|_i \leq \delta e^{-\gamma t}$ donc pour tout $j \leq i$, $\|v_j\| \leq \delta e^{-\gamma t} = \epsilon(t)$.

De la même façon que précédemment, $|\frac{d\|x\|_{i+1}}{dt}| \leq \|v\|_{i+1}$.

De plus,

$$\frac{d\|v\|_{i+1}^2}{dt} = 2 \sum_{j < k \leq i+1} a_{k,j} (\langle v_j, v_k \rangle - \|v_k\|^2) \leq -2 \frac{\lambda}{N} \psi(2\|x\|_{i+1}) \|v\|_{i+1} + 2 \frac{i(i+1)}{2} \alpha \epsilon(t) \|v\|_{i+1}$$

On note $\phi(s) = \frac{\lambda}{N} \psi(2s)$ et $\epsilon_2(t) = \frac{i(i+1)}{2} \alpha \epsilon(t) = \delta' e^{-\gamma t}$.

On pose les fonctions de Lyapunov $\epsilon_{\pm}(\|x\|_{i+1}, \|v\|_{i+1}) = \|v\|_{i+1} \pm \Phi(\|x\|_{i+1})$ avec $\Phi'(s) = \phi(s)$. Alors,

$$\frac{d}{dt} \epsilon_{\pm}(\|x(t)\|_{i+1}, \|v(t)\|_{i+1}) \leq \epsilon_2(t)$$

donc,

$$\|v(t)\|_{i+1} - \|v_0\|_{i+1} \leq -|\Phi(\|x(t)\|_{i+1}) - \Phi(\|x_0\|_{i+1})| + \frac{\delta'}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \leq - \left| \int_{\|x_0\|_{i+1}}^{\|x(t)\|_{i+1}} \phi(s) ds \right| + \frac{\delta'}{\gamma}$$

La fonction

$$F : u \geq 0 \mapsto \int_{\|x_0\|_{i+1}}^u \phi(s) ds$$

est croissante et continue.

Comme $F(\|x_0\|_{i+1}) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = +\infty > \|v_0\|_{i+1} + \frac{\delta'}{\gamma}$, on peut poser x_M , la plus grande valeur telle que

$$\|v_0\|_{i+1} + \frac{\delta'}{\gamma} = F(x_M)$$

De la même façon que précédemment, $\|x(t)\|_{i+1} \leq x_M$. En fait, quitte à prendre x_M plus grand, on peut supposer que $\gamma' = \phi(x_M) \neq \gamma$.

On a donc :

$$\frac{d\|v(t)\|_{i+1}}{dt} \leq -\gamma' \|v(t)\|_{i+1} + \epsilon_2(t)$$

Ensuite, par le lemme de Grönwall :

- si $\gamma > \gamma'$, $\|v(t)\|_{i+1} \leq (\|v_0\|_{i+1} + \frac{\delta'}{\gamma - \gamma'}) e^{-\gamma' t}$
- si $\gamma < \gamma'$, $\|v(t)\|_{i+1} \leq (\|v_0\|_{i+1} + \frac{\delta'}{\gamma' - \gamma}) e^{-\gamma t}$

□

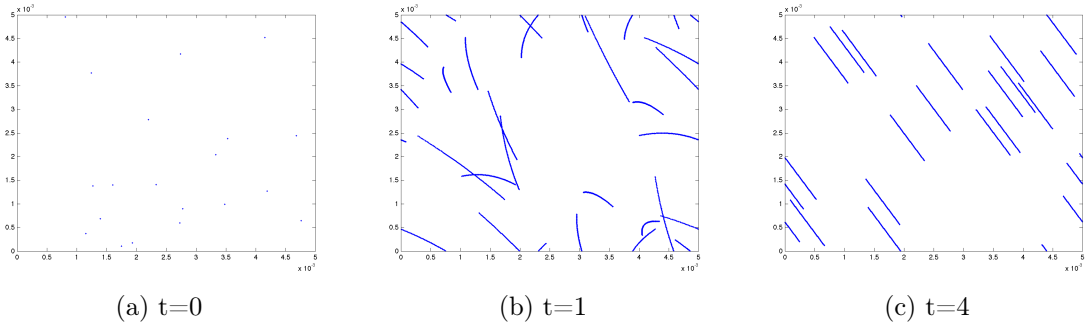
2.5 Remarque sur la preuve originale de *flocking*

La preuve présentée ici n'est pas la preuve originale de Cucker et Smale (voir [3] et [4]). La preuve de Ha et Liu a l'avantage d'être moins technique et d'être facilement réutilisable pour des extensions du modèle. Cependant, la preuve originale peut être modifiée pour démontrer un théorème de *flocking* dans le cas où certains oiseaux sont considérés comme des leaders, c'est-à-dire que certains oiseaux ont des directions privilégiées (voir [2]).

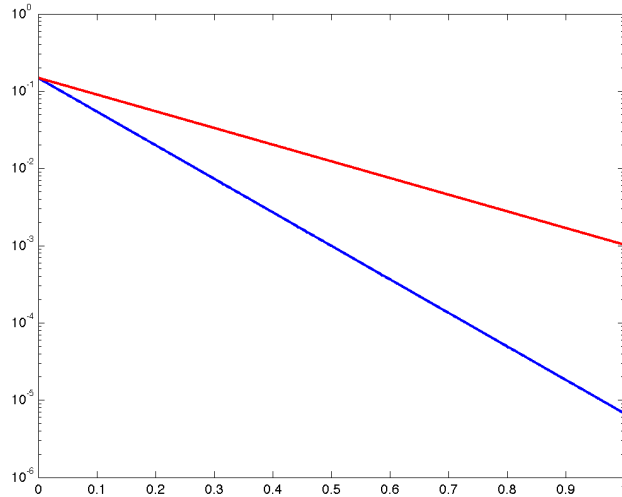
3. Simulations

3.1 Illustrations des résultats théoriques

Afin d'illustrer nos résultats théoriques et de confronter le modèle à différents environnements, nous avons effectué de nombreuses simulations numériques (en utilisant surtout comme solveur le *ODE45* de Matlab, voir l'annexe B pour la convergence des méthodes de Runge et Kutta sur notre modèle). Dans cette partie, nous avons principalement réalisé des petits "films" où l'on voit la trajectoire (modulo une constante afin de ne pas avoir à gérer la fenêtre graphique) des oiseaux en 2D. En voici un exemple avec $N = 20$, $\beta = 2$:

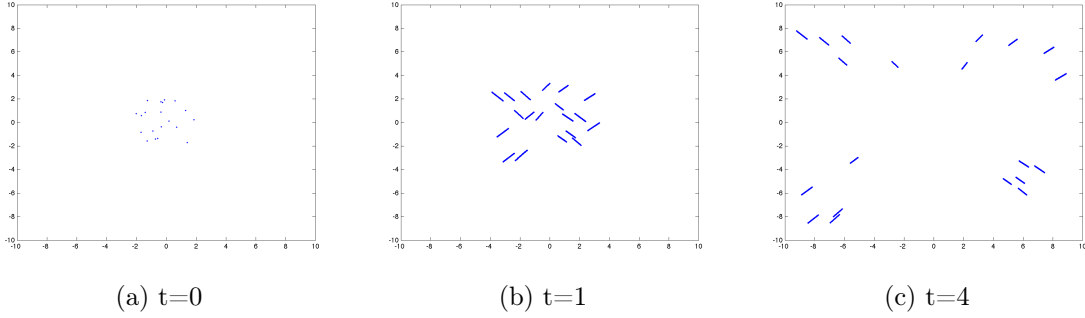


On voit qu'il y a *flocking* dans ce cas car les oiseaux ont leur vitesse qui s'aligne. Parallèlement, on peut calculer $\|v(t) - v_c\|$ et la comparer à la borne théorique du théorème, ce qui donne pour la simulation précédente avec une échelle logarithmique :



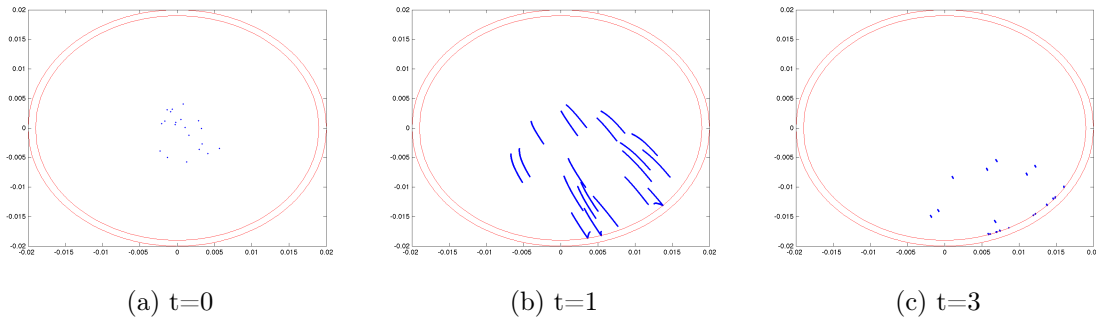
3.2 Exemple de non-*flocking*

Comme on l'a vu dans le théorème, il y a *flocking* uniquement sous certaine condition sur les conditions initiales pour $\beta > 1$. On reprend ici l'exemple de [1] de non-*flocking* que l'on étend à deux dimensions : on considère quatre groupes d'oiseaux de taille égale qui partent dans quatre directions différentes avec une vitesse suffisamment élevée pour que ces groupes ne se "rejoignent" pas.

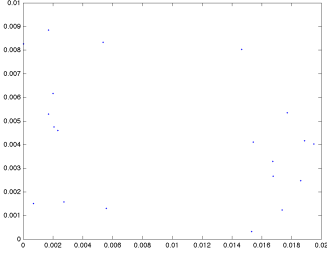


3.3 Problème du mur circulaire

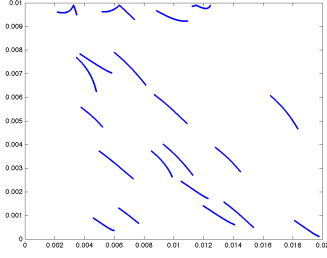
Maintenant, nous allons voir le comportement du modèle placé dans des environnements particuliers. Dans le premier cas, nous allons placer dans une "boîte" circulaire c'est-à-dire que l'on entoure les oiseaux d'un mur circulaire (qui est en fait un potentiel répulsif ici, mais nous avons aussi essayé avec des réflexions ce qui a donné le même résultat). Voici un exemple :



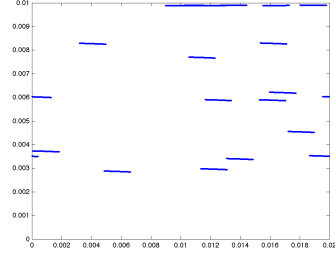
Le problème est que les oiseaux ont une vitesse qui tend vers 0 alors que dans d'autres modèles (en particulier celui de Viscek) les oiseaux tournent dans la boîte. Ceci est dû au fait que le modèle CS travaille sur chaque composante de la vitesse alors que le modèle de Viscek modifie les angles. Ceci a pour conséquence que le potentiel répulsif a tendance à absorber la composante orthogonale au potentiel, donc dans le cas du cercle, la vitesse toute entière. Voici un exemple où l'on place les oiseaux dans une bande délimitée par des murs parallèles pour se persuader de ce comportement :



(a) t=0



(b) t=1



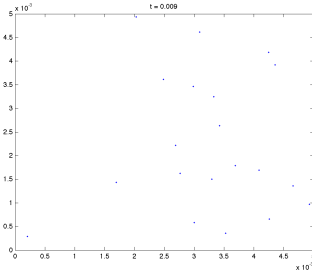
(c) t=4

3.4 Ajout de bruit aléatoire

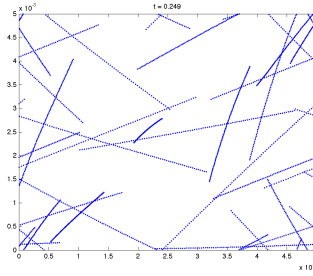
Dans le deuxième cas, on ajoute un terme aléatoire sur l'accélération (de moyenne nulle à tout instant afin de conserver la vitesse moyenne constante) de cette façon :

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(\|x_i(t) - x_j(t)\|)(v_j(t) - v_i(t)) + \xi_i(t)$$

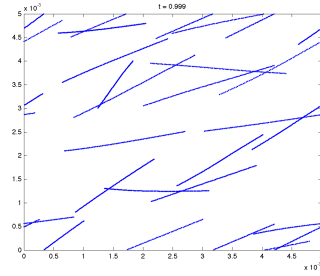
avec $\xi_i(t) = 0, \forall t \in [n\delta, (n+1)\delta]$ où $n \bmod 2 = 0$ et $\delta > 0$ fixé. Voici ce que l'on obtient numériquement :



(a) t=0

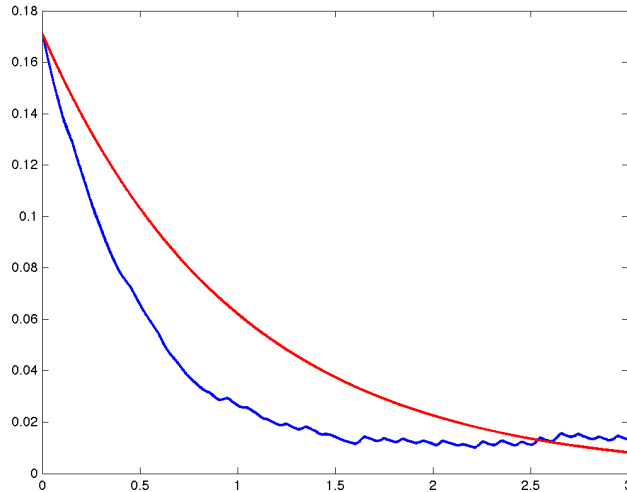


(b) t=1



(c) t=4

et le tracé de $\|v(t) - v_c\|$ associé :



Il n'y a jamais *flocking* à proprement parler mais la vitesse suit à peu près la borne théorique, au moins au début.

4. Description cinétique du modèle CS

4.1 Passage aux EDP

Lorsqu'on considère un très grand nombre de particules, il devient pertinent de raisonner sur un modèle dans lequel on considère non pas les individus un à un, mais une densité d'individus en tout point de l'espace des phases.

On introduit la fonction de distribution pour N particules :

$$f^N(x_1, v_1, \dots, x_N, v_N, t)$$

où $(x_i, v_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. qui représente la probabilité que les particules i soient entre x_i et $x_i + dx_i$ à des vitesses entre v_i et $v_i + dv_i$ à l'instant t .

Comme on ne peut pas distinguer les particules entre elles, la densité de probabilité f^N est symétrique en ses arguments x_i, v_i , et on peut donc noter :

$$f^N(x_1, v_1, t) = \int_{\mathbb{R}^{2d(N-1)}} f^N(x_1, v_1, x_-, v_-, t) dx_- dv_-$$

$$\text{où } (x_-, v_-) = (x_2, v_2, \dots, x_N, v_N).$$

Théorème 4. *La dérivation formelle de la description cinétique du système de Cucker-Smale donne l'équation de type Liouville :*

$$\partial_t f^N + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{x_i} f^N + \frac{\lambda}{N} \sum_{i=1}^N \nabla_{v_i} \cdot \left(\sum_{j=1}^N r(x_i, x_j) (v_j - v_i) f^N \right) = 0 \quad (4.1)$$

On cherche $f^N(x_1, v_1, t)$ en intégrant l'équation (4.1). Comme f^N décroît rapidement en $+\infty$, on a que le terme de transport vaut :

$$\int_{\mathbb{R}^{2d(N-1)}} \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{x_i} f^N dx_- dv_- = v_1 \cdot \nabla_{x_1} f^N(x_1, v_1)$$

Le terme de forçage correspondant vaut :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^{2d(N-1)}} \sum_{j=1}^N \nabla_{v_i} \cdot (r(x_i, x_j) (v_j - v_i) f^N) dx_- dv_- \\ &= \frac{\lambda}{N} \int_{\mathbb{R}^{2d(N-1)}} \sum_{2 \leq j \leq N} \nabla_{v_1} \cdot (r(x_1, x_j) (v_j - v_1) f^N) dx_- dv_- \end{aligned}$$

Donc, par symétrie de f^N , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^{2d(N-1)}} \sum_{j=1}^N \nabla_{v_i} \cdot (r(x_i, x_j) (v_j - v_i) f^N) dx_- dv_- \\ &= \frac{\lambda}{N} (N-1) \int_{\mathbb{R}^{2d(N-1)}} r(x_1, x_2) \nabla_{v_1} \cdot ((v_2 - v_1) f^N) dx_- dv_- \\ &= \left(\lambda - \frac{\lambda}{N} \right) \nabla_{v_1} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^{2d(N-1)}} r(x_1, x_2) (v_2 - v_1) g^N dx_2 dv_2 \right) \end{aligned}$$

où $g^N(x_1, v_1, x_2, v_2, t) = \int_{\mathbb{R}^{2d(N-1)}} f^N dx_3 dv_3 \dots dv_N dv_N$, on a donc :

$$\partial_t f^N + v_1 \cdot \nabla_{x_1} f^N + \left(\lambda - \frac{\lambda}{N} \right) \nabla_{v_1} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} r(x_1, x_2) (v_2 - v_1) g^N dx_2 dv_2 \right) = 0$$

On fait maintenant tendre N vers l'infini, on obtient les densités limites $f = \lim_{N \rightarrow \infty} f^N(x_1, v_1)$ et $g = \lim_{N \rightarrow \infty} g^N(x_1, v_1, x_2, v_2)$, qui satisfont :

$$\partial_t f + v_1 \cdot \nabla_{x_1} f + \lambda \nabla_{v_1} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} r(x_1, x_2) (v_2 - v_1) g dx_2 dv_2 \right) = 0$$

Donc, sous l'hypothèse du chaos moléculaire, c'est-à-dire que

$$g(x_1, v_1, x_2, v_2, t) = f(x_1, v_1, t) f(x_2, v_2, t)$$

on a en renommant $(x_1, v_1) \mapsto (x, v)$, $(x_2, v_2) \mapsto (x_*, v_*)$:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \lambda \nabla_v \cdot Q(f, f) = 0$$

où $Q(f, f)(x, v, t) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} r(x, x_*) (v_* - v) f(x, v, t) f(x_*, v_*, t) dx_* dv_*$, que l'on peut exprimer comme $Q(f, f) = fL[f]$, avec $L[f](x, v, t) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} r(x, x_*) (v_* - v) f(x_*, v_*, t) dx_* dv_*$.

C'est une équation de type Vlasov, due à Ha et Tadmor ([6]).

4.2 Particules cinétique et méthode de Monte-Carlo

Pour résoudre cette équation de façon numérique, nous avons utilisé une méthode de Monte-Carlo directe, comme elle peut être trouvée dans [7].

On veut trouver une solution numérique au système :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \lambda \nabla_v \cdot Q(f, f) = 0 \\ f(x, v, 0) = g(x, v) \end{cases}$$

L'idée derrière cette méthode est d'approximer $f(x, v, t)$ par une somme de masses de Dirac :

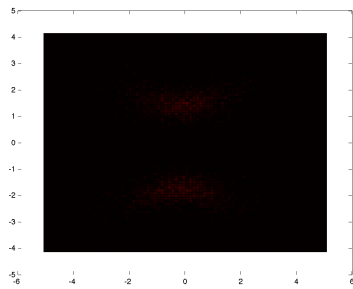
$$f(x, v, t) \simeq \lambda \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \delta_{X_i(t)} \otimes \delta_{V_i(t)}$$

La méthode à proprement parler est la suivante :

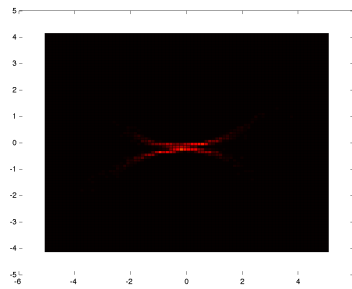
- tirer N particules cinétiques $(X_i(0), V_i(0))$ indépendamment et suivant la loi de probabilité $g(x, v) dx dv$
- résoudre l'équation différentielle que suit chaque (X_i, V_i) , c'est-à-dire résoudre un système de Cucker-Smale classique.

Notons que vu le grand nombre de particules mises en jeu dans ces simulations (de l'ordre du millier), l'utilisation d'un solveur aussi fin que *ODE45* est totalement impossible. On a donc ici utilisé un solveur grossier (un simple schéma d'Euler), mais qui donne de bons résultats.

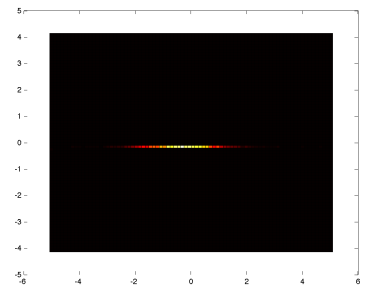
Voici une simulation faite avec le modèle cinétique. Elle est représentée dans l'espace des phases, et les couleurs chaudes correspondent à des densités de particules fortes.



(a) $t=0$

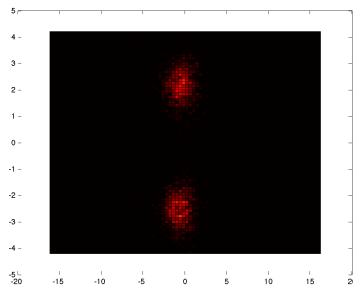


(b) $t=0.25$

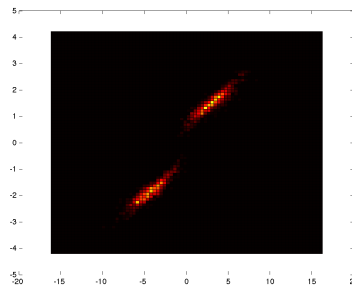


(c) $t=4$

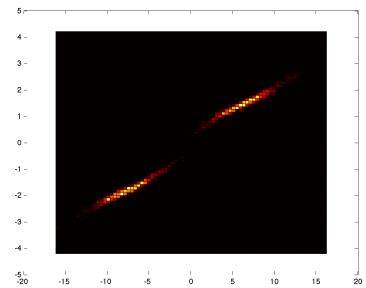
Voici une autre simulation faite avec le modèle cinétique. Cette fois-ci, on observe une séparation des deux groupes initiaux.



(a) $t=0$

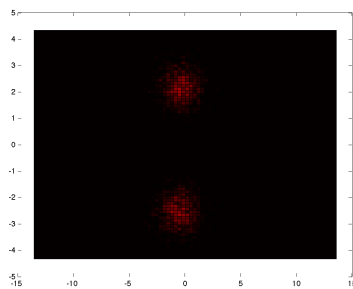


(b) $t=2$

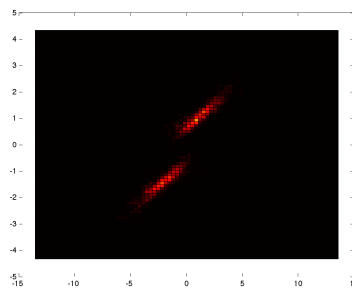


(c) $t=4$

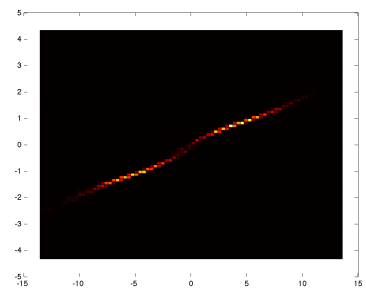
Voici une troisième simulation où le comportement est divergent, mais où des parties des deux groupes se rejoignent.



(a) $t=0$



(b) $t=1$



(c) $t=4$

5. Conclusion

Le modèle de Cucker-Smale est un modèle récent qui sert à modéliser le mouvement collectif

Le système de Cucker-Smale est un système qui était à la base censé représenter l'évolution des langages est un des seuls modèles capable de modéliser des comportements d'animaux visible dans la nature (*flocking*) et qui soit en même temps suffisamment simple pour qu'on ait des résultats théoriques dessus. Les autres modèles existants (en particulier le modèle de Viscik) montrent des comportements encore plus complexes, mais il sont très difficiles à étudier, et aucun résultat théorique fort n'a été démontré pour aucun d'entre eux.

Ce modèle est aussi un modèle simple mais robuste qui se voit souvent augmenté d'extensions diverses. Par exemple, on a traité ici le cas d'une influence triangulaire et une zone d'influence, et le cas général a été traité dans un cadre très général, qui marche pour de nombreuses fonctions d'interaction entre les oiseaux. Ce modèle est souvent augmenté pour des problèmes particuliers. Ainsi, il existe des extensions de ce modèle pour modéliser le plasma, la photosynthèse, ou encore les environnements avec des prédateurs.

A. Résultats de théorie des graphes

A.1 Propriétés de base du laplacien

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux propriétés du spectre du laplacien car nous avons vu que sa plus petite valeur propre sur l'ensemble des vecteurs de moyenne nulle joue un rôle important dans les résultats théoriques. Nous allons considérer que des graphes non-orientés, sans boucle et sans poids. On note $G = (V, E)$, un graphe avec V , l'ensemble de ces sommets et E , l'ensemble de ces arêtes. On appelle A , sa matrice d'adjacence, L son laplacien.

Propriété 1. Soient L , le laplacien de $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ et $\Delta = (1, \dots, 1)$ de taille N .

- (i) $L\Delta = 0$
- (ii) $\forall v = (v_1, \dots, v_N), \langle Lv, v \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} a_{i,j} (v_i - v_j)^2$
- (iii) L est symétrique positive

Démonstration. (i) évident

(ii) Par symétrie de A ,

$$\begin{aligned} \langle Lv, v \rangle &= \sum_{1 \leq i \leq N} \left(\sum_{1 \leq j \leq N} a_{i,j} \right) v_i^2 - \sum_{1 \leq i,j \leq N} a_{i,j} v_i v_j \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \left(\sum_{1 \leq j \leq N} a_{i,j} \right) v_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i,j \leq N} a_{i,j} v_i v_j + \sum_{1 \leq j \leq N} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} a_{i,j} \right) v_j^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} a_{i,j} (v_i - v_j)^2 \end{aligned}$$

(iii) se déduit de (ii)

□

On aurait pu voir (iii) sans passer par (ii) :

Théorème 5 (Gerschgorin). Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ une matrice complexe.

$\forall i$, soit $D_i = \{z \in \mathbb{C}, |m_{i,i} - z| \leq \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|\}$ (disque de Gerschgorin).

Alors, toute valeur propre de M appartient à l'un des D_i .

Dans notre cas, $m_{i,i} = \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|$, donc on en déduit que toutes les valeurs propres de L sont positives. On sait même qu'elles sont comprises entre 0 et $2 \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j \neq i} a_{i,j}$.

Démonstration. Soit λ une valeur propre de M , de vecteur propre $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Pour tout i , $(\lambda - m_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$.

Soit i tel que $|x_i|$ est maximal. Comme $x \neq 0$, $|x_i| \neq 0$.

$$|a_{i,i} - \lambda| = \left| \sum_{j \neq i} a_{i,j} \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

□

Définition 6 (Nombre de Fiedler). *Comme on l'a vu, on peut numéroter les valeurs propres de L de cette façon :*

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$$

On appelle λ_2 , le nombre de Fiedler de A et on le note ϕ_F .

Comme Δ est vecteur propre de 0 et que L est symétrique, alors $\phi_F = \min_{v \neq 0 \text{ de moyenne nulle}} \frac{\langle Lv, v \rangle}{\|v\|^2}$.

A.2 Connexité et valeur propre 0

Comme on l'a vu dans les résultats théoriques, on est intéressé par une minoration de ϕ_F par quelque chose de strictement positif. Il est donc intéressant de savoir à quelle condition nécessaire et suffisante $\phi_F \neq 0$. En effet, dans ce cas on est sûr qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $\phi_F \neq 0$, $\phi_F \geq K$ (il suffit de prendre le minimum des nombres de Fiedler non nuls des matrices d'une taille donnée). Ce sera l'objectif des sections suivantes de déterminer une valeur explicite de K en fonction de N .

Comme $L\Delta = 0$, il est facile de voir que si $G(A)$ a k composantes connexes alors 0 est valeur propre de multiplicité au moins k . En particulier, si $G(A)$ n'est pas connexe alors $\phi_F = 0$. En réalité, la réciproque est vraie et s'appuie sur le théorème de Perron-Frobenius.

Théorème 6 (Perron-Frobenius dans le cas symétrique). *Soit M , une matrice réelle symétrique à coefficients positifs dont le graphe associé est connexe.*

Le rayon spectral ρ de M est une valeur propre simple de M .

(Ici, le graphe associé à M est le graphe de matrice d'adjacence $\overline{M}$ défini par $\overline{m}_{i,j} = 0$ si $m_{i,j} = 0$ et 1 sinon).

Corollaire 1. $\phi_F = 0$ ssi G n'est pas connexe.

Démonstration. $\Leftarrow$ cf remarque ci-dessus

$\Rightarrow$ par contraposée.

On applique le théorème de Perron-Frobenius à $J = (N - 1)I_N - L$.

En effet, J est symétrique à coefficients positifs et son graphe est celui de matrice d'adjacence A . De plus, ses valeurs propres sont les $N - 1 - \lambda_i$, donc son rayon spectral est $N - 1$ et la multiplicité de $N - 1$ dans J est égale à la multiplicité de 0 dans L . Or, par le théorème de Perron-Frobenius, $N - 1$ est de multiplicité 1 dans J .

□

Corollaire 2. 0 est de multiplicité k ssi G a k composantes connexes.

Démonstration. Il suffit de voir que quitte à renuméroter les sommets, A est diagonale par blocs avec k blocs diagonaux qui sont les matrices d'adjacence des k composantes connexes puis d'appliquer le corollaire précédent. □

A.3 Cas d'un graphe complet

Pour le théorème de convergence de CS-classic, on a besoin de connaître le nombre de Fiedler d'un graphe complet (ie de matrice d'adjacence avec que des 1). Par ce qui précède, 0 est valeur propre simple de L . De plus, $NI_N - L = A$ donc $rg(NI_N - L) = 1$. On en déduit que N est valeur propre de multiplicité $N - 1$ donc $\phi_F = N$.

A.4 Minoration du nombre de Fiedler d'un graphe connexe

On a vu que l'on pouvait minorer le nombre de Fiedler d'une matrice associée à un graphe connexe de taille donnée par une constante strictement positive. L'objectif de cette section est de trouver une valeur à cette constante (voir [8] et [9]).

Lemme 5. Soit $G = (V, E)$ non orienté, connexe, sans boucle.

Pour tout $u, v \in V$, on note $P_{u,v}$, un plus court chemin de u à v .

Alors, tout $e \in E$ appartient à au plus $\frac{N^2}{4}$ plus court chemins $P_{u,v}$.

Démonstration. Soit $e = \{x, y\} \in E$.

On définit le graphe $\Gamma_e = (V, E')$ avec $E' = \{\{u, v\} \in E \mid \exists P_{u,v} \text{ tq } e \in P_{u,v}\}$.

Montrons que $|E'| \leq \frac{N^2}{4}$.

- tout d'abord, montrons que si $\{u, v\} \in E'$ et $\{v, w\} \in E'$ alors $\{u, w\} \notin E'$. Supposons par l'absurde que $\{u, w\} \in E'$ et soient $P_{u,v}$, $P_{v,w}$ et $P_{u,w}$, les plus courts chemins correspondants et orientons les de u à v , de v à w et de u à w . Alors, au moins deux de ces chemins empruntent e dans le même sens, disons de x à y .
- soit ce sont $P_{u,v}$ et $P_{v,w}$ alors $\text{dist}(u, y) > \text{dist}(u, x)$ et $\text{dist}(v, y) > \text{dist}(v, x)$. Or $\text{dist}(u, v) \leq \text{dist}(u, x) + \text{dist}(v, x) < \text{dist}(u, x) + \text{dist}(v, y)$ et de la même façon, $\text{dist}(u, v) < \text{dist}(u, y) + \text{dist}(v, x)$. Donc, $e \notin P_{u,v}$ ce qui est absurde.
- soit ce sont $P_{u,w}$ et $P_{u,v}$ alors on les oriente dans l'autre sens et on revient au cas précédent
- soit ce sont $P_{u,w}$ et $P_{v,w}$ et on revient au premier cas avec $P_{w,v}$ et $P_{u,v}$
- Maintenant, montrons par récurrence que $|E'| \leq \frac{N^2}{4}$.
 - les cas $N = 0$ et $N = 1$ sont évidents
 - soit $N \geq 2$. On note $\deg(u) = |\{v \mid \{u, v\} \in E'\}|$. Soit $u, v \in V$. Si on ne peut pas en trouver qui soient adjacents alors $|E'| = 0 \leq \frac{N^2}{4}$. Supposons qu'ils le soient. Par ce qui précède $\deg(u) + \deg(v) \leq N$. Si on prend le graphe $\Gamma' = (V \setminus \{u, v\}, E'')$ avec $E'' = E' \setminus (\{\{u, w\} \in E'\} \cup \{\{v, w\} \in E'\})$, alors on a $|E'| = |E''| + \deg(u) + \deg(v) - 1$. Ainsi, par HR, $|E'| \leq \frac{(N-2)^2}{4} + N - 1 = \frac{N^2}{4}$.

□

Définition 7 (Diamètre d'un graphe). On appelle diamètre de G , la longueur du plus long chemin qui passe au plus une fois par chaque sommet. On le note $\text{diam}(G)$.

Théorème 7. Si G est connexe alors $\text{diam}(G) \geq \frac{4}{N\phi_F}$.

Démonstration. Soient $u, v \in V$ et $P_{u,v}$, un plus court chemin de u à v .

Soit x , vecteur propre de ϕ_F .

Alors, $\langle Lx, x \rangle = \phi_F \|x\|^2$ ie $\sum_{\{u,v\} \in E} (x_u - x_v)^2 = \phi_F \sum_{v \in V} x_v^2$.

Comme Δ est vecteur propre de 0, L est symétrique et $\phi_F \neq 0$ alors $\Delta \perp x$ donc $\sum_{v \in V} x_v = 0$.

Donc, $\phi_F \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} (x_u - x_v)^2 = 2\phi_F \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} x_v^2 = 2N \sum_{\{u,v\} \in E} (x_u - x_v)^2$.

Pour tout $u, v \in V$, si $P_{u,v} = u, v_1, \dots, v_{k-1}, v$ donc avec $k = \text{dist}(u, v)$

donc si on note $\delta(\{a, b\}) = (x_a - x_b)^2$ alors par convexité $(x_u - x_v)^2 \leq \text{dist}(u, v) \sum_{e \in P_{u,v}} \delta(e)$.

Soit $\chi_{\{u,v\}} : E \rightarrow \{0, 1\}$ tel que $\chi_{\{u,v\}}(e) = 1$ ssi $e \in P_{u,v}$.

Alors, $\sum_{u \in V} \sum_{v \in V} (x_u - x_v)^2 \leq \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} \text{dist}(u, v) \sum_{e \in E} \delta(e) \chi_{\{u,v\}}(e) = \sum_{e \in E} \delta(e) \sum_{u,v} \text{dist}(u, v) \chi_{\{u,v\}}(e)$.

Or, $dist(u, v) \leq diam(G)$ et pour tout e , par le lemme, $\sum_{u,v} \chi_{\{u,v\}}(e) \leq 2\frac{N^2}{4}$.

Donc, $2N \sum_{e \in E} \delta(e) = 2N \sum_{\{u,v\} \in E} (x_u - x_v)^2 \leq \phi_F \frac{N^2}{2} diam(G) \sum_{e \in E} \delta(e)$.

Or, $\sum_{e \in E} \delta(e) \neq 0$ car $x \perp \Delta$ donc $diam(G) \geq \frac{4}{\phi_F N}$. □

Corollaire 3. *Si G est connexe alors $\phi_F \geq \frac{4}{N(N-1)}$.*

B. Convergence des schémas numériques

Afin de vérifier la pertinence de nos simulations numériques, il est important de savoir si elles "approximent" correctement les solutions réelles.

B.1 Théorème général

On considère une EDO de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

On tente d'approximer $y(t)$ qui vérifie cette EDO avec $y(0) = y_0$ sur $[0, T]$ avec un pas h . On suppose qu'il existe un entier k tel que $kh = T$.

Définition 8 (Méthode à un pas constant). *On approxime $y(nh)$ par y_n défini par*

$$y_0 = y(0), y_{n+1} = y_n + h\Phi(nh, y_n, h)$$

Définition 9 (consistance d'ordre p , stabilité, convergence). *Soit Φ , une méthode à un pas et y_n une approximation de $y(t)$. On dit que la méthode est :*

- *consistante d'ordre p si $\forall t \in [0, T - h], \|y(t + h) - y(t) - h\Phi(t, y(t), h)\| \leq Ch^{p+1}$*
- *stable si $\forall n \leq \frac{T}{h}, \|\Phi(nh, y_n, h) - \Phi(nh, y(nh), h)\| \leq \Lambda \|y_n - y(nh)\|$*
- *convergente si $\lim_{h \rightarrow 0} \max_{n \leq \frac{T}{h}} \|y_n - y(nh)\| = 0$*

Théorème 8 (Condition suffisante de convergence). *Si une méthode est consistante d'ordre p et stable alors elle est convergente et*

$$\forall n \leq \frac{T}{h}, \|y_n - y(nh)\| \leq h^p \frac{C}{\Lambda} (e^{\Lambda nh} - 1)$$

Démonstration. Montrons le par récurrence sur n .

- le cas $n = 0$ est évident car $y(0) = y_0$.

- Soit $n \geq 0$.

Soit $z = y(nh) + h\Phi(nh, y(nh), h)$. On pose $t_n = nh$.

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y(t_{n+1})\| &\leq \|y_n - y(t_n)\| + h\|\Phi(t_n, y_n, h) - \Phi(t_n, y(t_n), h)\| + \|z - y(t_{n+1})\| \\ &\leq (\Lambda h + 1)\|y_n - y(t_n)\| + Ch^{p+1} \\ &\leq (\Lambda h + 1)h^p \frac{C}{\Lambda} (e^{\Lambda t_n} - 1) + Ch^{p+1} \\ &\leq e^{\Lambda h} h^p \frac{C}{\Lambda} e^{\Lambda t_n} - (\Lambda h + 1)h^p \frac{C}{\Lambda} + Ch^{p+1} \\ &= h^p \frac{C}{\Lambda} (e^{\Lambda t_{n+1}} - 1) \end{aligned}$$

□

B.2 Convergence des RKp pour le modèle CS

Ici, nous allons utiliser le théorème précédent sur le modèle CS avec comme méthodes, celles de Runge et Kutta (en particulier celles d'ordre 1, 2 et 4). Nous pourrions en déduire la convergence de *ODE45* car ce dernier est une amélioration de *RK4*.

Définition 10 (RK1, RK2 et RK4). *Soit le problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$ et $y(0) = y_0$.*

- *RK1 : $y_{n+1} = y_n + hf(nh, y_n)$*
- *RK2 : $y_{n+1} = y_n + hf(nh + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(nh, y_n))$*
- *RK4 :*
 - $k_1 = f(nh, y_n)$
 - $k_2 = f(nh + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$
 - $k_3 = f(nh + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$
 - $k_4 = f(nh + h, y_n + hk_3)$
 - $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Lemme 6 (Stabilité). *RK1, RK2 et RK4 sont stables pour le modèle CS.*

Démonstration. Dans notre cas, la fonction f est C^∞ donc les fonctions Φ définies par les RKp sont C^∞ .

Soit $T > 0$. On définit $Y = \{y_n \text{ avec } n \leq \frac{T}{h}\} \cup \{y(nh) \text{ avec } n \leq \frac{T}{h}\}$. Y est fini donc il est inclus dans un compact K . Or Φ est C^1 sur $[0, T] \times K \times [0, h] = K'$ donc lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur K' . En particulier, on en déduit la stabilité. $\square$

Lemme 7 (Consistance). *RKp est consistante d'ordre p pour le modèle CS.*

Démonstration. Nous le montrons pour RK2, la preuve étant la même pour les autres.

$$\|y(t+h) - y(t) - h\Phi(t, y(t), h)\| \leq \|y(t+h) - y(t) - hy'(t) - \frac{h^2}{2}y''(t)\| + h\|\Phi(t, y(t), h) - y'(t) - \frac{h}{2}y''(t)\|$$

Si on pose $M = \frac{1}{6} \sup_{s \in [0, T]} \|y^{(3)}(s)\|$ alors par l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\|y(t+h) - y(t) - hy'(t) - \frac{h^2}{2}y''(t)\| \leq Mh^3$$

Or, $y'(t) = f(t, y(t))$ et $y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + f(t, y(t))\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$.

De plus, $\Phi(t, y(t), 0) = f(t, y(t))$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y(t), 0) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{f(t, y(t))}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$.

Donc, $\|\Phi(t, y(t), h) - y'(t) - \frac{h}{2}y''(t)\| = \|\Phi(t, y(t), h) - \Phi(t, y(t), 0) - h\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y(t), 0)\|$.

Ainsi, si on note $D = \frac{1}{2} \sup_{\substack{0 \leq h' \leq h \\ s \in [0, T]}} \|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(s, y(s), h')\|$ alors :

$$\|y(t+h) - y(t) - h\Phi(t, y(t), h)\| \leq (M + D)h^3$$

$\square$

Corollaire 4. *Les RKp (donc ODE45) convergent pour le modèle CS.*

Bibliographie

- [1] Carrillo, Fornasier, Toscani, and Vecil. Particle, kinetic, and hydrodynamic models of swarming. 2009.
- [2] Felipe Cucker and Cristián Huepe. Flocking with informed agents. 2008.
- [3] Felipe Cucker and Steve Smale. Emergent behavior in flocks. 2005.
- [4] Felipe Cucker and Steve Smale. The mathematics of emergence. 2006.
- [5] Seung-Yeal Ha and Jian-Guo Liu. A simple proof of the cucker-smale flocking dynamics and mean-field limit. 2009.
- [6] Seung-Yeal Ha and Eitan Tadmor. From particle to kinetic and hydrodynamic descriptions of flocking. 2008.
- [7] Bernard Lapeyre, Etienne Pardoux, and Remi Sentis. *Méthode de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*. 1998.
- [8] Bojan Mohar. The laplacian spectrum of graphs.
- [9] Bojan Mohar. Eigenvalues, diameter and mean distance in graphs. 1991.
- [10] Tamás Viscek and Anna Zafiris. Collective motion. 2010.