

1 今回の講義の内容

2.10 節 (p. 45) から, 教科書 2.10 節の終わり (p.57) まで.

ハイライト

- 3つの最小オートマトン
 - Myhill-Nerode による M_L (命題 2.11)
 - * 理論的な存在. 具体的な L に対して, $[x]_L = [y]_L$ であることを示すのは難しく, 実際の構成には向かない.
 - 左剰余 (あるいは左微分) $x \setminus L$ による M'_L (定理 2.19)
 - * Myhill-Nerode の M_L より構成しやすい. (ただし「人間のアタマで」. 計算アルゴリズムがあるわけではない. そもそも L は任意の言語だし)
 - 与えられたオートマトン M に対して, その区別可能性による最小化 M^μ (定理 2.20)
 - * これは計算アルゴリズムがある. (アルゴリズム 2.1)
- 最小オートマトンの「比較」のために: オートマトンの同型の概念 (定義 2.18)
 - 状態空間の全単射, かつ構造を保つ (初期状態, 遷移, 受理状態か否か)
 - 2つのオートマトンが同型ならば, それらは本質的に同じ.
 - ここで「本質的に同じ」とは, 「りんご 5 個 vs. みかん 5 個」くらいの気持ち.
- アルゴリズム 2.1 について: 次のことが気になる
 - 停止性: このアルゴリズム, 停まる?
 - * 略証: ループ一回の実行で集合 `UnmarkedList` が 1 つ小さくなる. `UnmarkedList` は有限集合.
 - 正しさ: このアルゴリズムは, ちゃんと \equiv_M を計算しているか? これは実はそう簡単ではない. 下を見よ.

Lemma 1. アルゴリズム 2.1 は正しい. つまり, アルゴリズムの実行後の `MarkedList`, `UnMarkedList` について, 次が成立する.

$$\text{アルゴリズム実行後に } (p, q) \in \text{UnMarkedList} \iff p \equiv_M q$$

Proof. 両辺の否定をとって, 次を示す.

$$\text{アルゴリズム実行後に } (p, q) \in \text{MarkedList} \iff p \not\equiv_M q$$

この右辺は次と同値 (p, q の対称性をういた):

$$\delta^*(p, z) \in F \text{ かつ } \delta^*(q, z) \notin F \text{ となる } z \in \Sigma^* \text{ がある.} \quad (1)$$

[\implies] はアルゴリズムの定義から明らか.

[\impliedby] を示すために, まず次の事実に注意する:

(*) 実行後の `MarkedList` について, $(\delta(p, a), \delta(q, a)) \in \text{MarkedList}$ ならば $(p, q) \in \text{MarkedList}$.

(これが成り立っていないことは、すなわち、アルゴリズムがまだ saturation に至っていないことを意味するので)

これを用いて、(1) の $z \in \Sigma^*$ の長さによる帰納法で $[\Leftarrow]$ を示す。 $z = \varepsilon$ のとき、 $p \in F$ かつ $q \notin F$ であるから明らかに $(p, q) \in \text{MarkedList}$ 。 $z = az'$ のとき、

$$\delta^*(p, az') = \delta^*(\delta(p, a), z') \in F, \quad \delta^*(q, az') = \delta^*(\delta(q, a), z') \notin F$$

であるから、帰納法の仮定 (z よりも短い z' について) より $(\delta(p, a), \delta(q, a)) \in \text{MarkedList}$ 。よって上の事実 (*) より $(p, q) \in \text{MarkedList}$ 。 \square

レポート課題 (復習問題)

1. 例 2.15 (p. 45) の 2 項関係 \equiv_3 について、同値類の間の和

$$[a]_{\equiv_3} + [b]_{\equiv_3} \quad \text{ただし } a, b \in \mathbf{N}$$

を定義して、その定義が well-defined であることを示せ。

(ヒント: p. 46 の定義 2.16 を参考にせよ。ただし厳密には定義 2.16 そのままではない)

2. 練習問題 2.9 (p. 54) のうち、前回レポートでやらなかったものを一つ解け。

2 次回の講義の内容

2015.10.30 (Fri) 教科書 2.11 節 (p.58) から、3.1 節の終わり (p.67) まで。

レポート課題 (予習問題)

なし。