ここでは、与式が valid / satisfiable / unsatisfiable であることを、semantical に示すことにする。(※ soundness を用いて示すこともできます)

一般に、
- 任意の structure $\mathfrak{S}$, valuation J について、$[\![A]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$ なら、A は valid.
- ある structure $\mathfrak{S}$, valuation J について、$[\![A]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$ なら、A は satisfiable.
- $[\![A]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$ なる structure $\mathfrak{S}$, valuation J が存在しないなら、A は unsatisfiable

である。

- $\forall x.\,(P \vee Q(x)) \supset P \vee (\forall x.\,Q(x))$

$\mathfrak{S}$ を任意の structure, J を任意の valuation とし、$[\![\forall x.\,(P \vee Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$ であったと仮定。

このとき、任意の $u \in U$ (U は $\mathfrak{S}$ の domain, 以下同様) について、$[\![P \vee Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},J[x \mapsto u]} = \mathit{tt}$.　　講義 Def 4.3.3 参照

よって任意の $u \in U$ で、$[\![P]\!]_{\mathfrak{S},J[x\mapsto u]}$ ($[\![P]\!]_{\mathfrak{S},J}$) $= \mathit{tt}$ または $[\![Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},J[x\mapsto u]} = \mathit{tt}$,

つまり、$[\![P]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$ または、任意の $u \in U$ について、$[\![Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},J[x\mapsto u]} = \mathit{tt}$.

したがって、$[\![P \vee (\forall x.\,Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$.

ゆえに、$[\![\forall x.\,(P \vee Q(x)) \supset P \vee (\forall x.\,Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$. これが任意の $\mathfrak{S}, J$ について成り立つので、与式は valid.

- $\forall x.\,(R(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x.\,R(x)) \vee (\forall x.\,Q(x))$

$\mathfrak{S}$ を、domain が $\mathbb{N}$、$[\![R]\!]_{\mathfrak{S}}(n) = [\![Q]\!]_{\mathfrak{S}}(n) = \mathit{ff}$ であるようなものとする。

すると、任意の valuation J 及び $n \in \mathbb{N}$ について、$[\![R(x)]\!]_{\mathfrak{S},J[x\mapsto n]} = [\![Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},J[x\mapsto n]} = \mathit{ff}$ なので、$[\![R(x) \vee Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},J[x\mapsto n]} = \mathit{ff}$.

したがって、$[\![\forall x.\,(R(x) \vee Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{ff}$ となり、$[\![\forall x.\,(R(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x.\,R(x)) \vee (\forall x.\,Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$. つまり、与式は satisfiable

一方、$\mathfrak{S}$ を、domain が $\mathbb{N}$、$[\![R]\!]_{\mathfrak{S}}(n) = \begin{cases} \mathit{tt} & (n\text{ が偶数}) \\ \mathit{ff} & (n\text{ が奇数}) \end{cases}$、$[\![Q]\!]_{\mathfrak{S}}(n) = \begin{cases} \mathit{tt} & (n\text{ が奇数}) \\ \mathit{ff} & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$ であるようなものとする。

すると、任意の valuation J について、

任意の $n \in \mathbb{N}$ について、$[\![R(x)]\!]_{\mathfrak{S},J[x\mapsto n]} = \mathit{tt}$ 又は $[\![Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$ であるので、$[\![\forall x.\,(R(x) \vee Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$ であるが、

$0 \in \mathbb{N}$ について、$[\![Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},J[x\mapsto 0]} = \mathit{ff}$ であるから、$[\![\forall x.\,R(x)]\!] = \mathit{ff}$ であり、$[\![(\forall x.\,R(x)) \vee (\forall x.\,Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{ff}$.

つまり、与式は valid でない

- $\forall x.\,(P \wedge Q(x)) \supset P \wedge (\forall x.\,Q(x))$

$\mathfrak{S}$ を任意の structure, J を任意の valuation とし、$[\![\forall x.\,(P \wedge Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$ であったと仮定。

このとき、任意の $u \in U$ について、$[\![P \wedge Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},J[x\mapsto u]} = \mathit{tt}$.

よって、任意の u について、$[\![P]\!]_{\mathfrak{S},J[x\mapsto u]} = [\![P]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$ かつ、$[\![Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},J[x\mapsto u]} = \mathit{tt}$.

つまり、$[\![P]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$ かつ、$[\![\forall x.\,Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$. ゆえに、$[\![P \wedge (\forall x.\,Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$.

したがって、$[\![\forall x.\,(P \wedge Q(x)) \supset P \wedge (\forall x.\,Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},J} = \mathit{tt}$.

これが任意の $\mathfrak{S}, J$ について成り立つので、与式は valid

- $\forall x.(R(x) \wedge Q(x)) \supset (\forall x.R(x)) \wedge (\forall x.Q(x))$.

  $\mathfrak{S}$を任意のstructure、$\mathcal{J}$を任意のvaluationとし、$[\![\forall x.(R(x) \wedge Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$であったと仮定。

  このとき任意の$u \in \mathcal{U}$について、$[\![R(x) \wedge Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[x \mapsto u]} = \mathbf{tt}$、つまり、$[\![R(x)]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[x \mapsto u]} = \mathbf{tt}$かつ$[\![Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[x \mapsto u]} = \mathbf{tt}$.

  したがって、それぞれ$[\![\forall x.R(x)]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$、$[\![\forall x.Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$

  ゆえに、$[\![(\forall x.R(x)) \wedge (\forall x.Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$.

  よって、$[\![\forall x.(R(x) \wedge Q(x)) \supset (\forall x.R(x)) \wedge (\forall x.Q(x))]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$

  これが任意の$\mathfrak{S},\mathcal{J}$について成り立つので、与式はvalid.

- $((\forall x.Q(x)) \supset P) \supset \exists x.(Q(x) \supset P)$

  $\mathfrak{S}$を任意のstructure、$\mathcal{J}$を任意のvaluationとし、$[\![(\forall x.Q(x)) \supset P]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$であったと仮定。

  このとき、$[\![\forall x.Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{ff}$、または、$[\![P]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$.

  $[\![\forall x.Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{ff}$のとき、ある$u \in \mathcal{U}$について、$[\![Q(x)]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[x \mapsto u]} = \mathbf{ff}$.

  したがって、ある$u \in \mathcal{U}$に対して$[\![Q(x) \supset P]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[x \mapsto u]} = \mathbf{tt}$. よって、$[\![\exists x.(Q(x) \supset P)]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$.

  一方、$[\![P]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = [\![P]\!]_{\mathfrak{S}} = \mathbf{tt}$のとき、

  Def.4.3.7よりdomain $\mathcal{U}$は空でないので、$u \in \mathcal{U}$なるuをとってきて、$[\![P]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[x \mapsto u]} = \mathbf{tt}$.

  つまり、ある$u \in \mathcal{U}$について、$[\![Q(x) \supset P]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[x \mapsto u]} = \mathbf{tt}$. よって$[\![\exists x.(Q(x) \supset P)]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$.

  よって、いずれの場合も、$[\![((\forall x.Q(x)) \supset P) \supset \exists x.(Q(x) \supset P)]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$.

  これが、任意の$\mathfrak{S},\mathcal{J}$について成り立つので、与式はvalid

以上、validであった1,3,4,5番目のproof treeは順に以下の通り

1.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(INIT)}
\UnaryInfC{$P \Rightarrow P$}
\RightLabel{(WEAKENING-R)}
\UnaryInfC{$P \Rightarrow P, Q(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(INIT)}
\UnaryInfC{$Q(x) \Rightarrow Q(x)$}
\RightLabel{(WEAKENING-L)}
\UnaryInfC{$Q(x) \Rightarrow P, Q(x)$}
\RightLabel{($\vee$-L)}
\BinaryInfC{$P \vee Q(x) \Rightarrow P, Q(x)$}
\RightLabel{($\forall$-L)}
\UnaryInfC{$\forall x.P \vee Q(x) \Rightarrow P, Q(x)$}
\RightLabel{($\forall$R) (VC)}
\UnaryInfC{$\forall x.(P \vee Q(x)) \Rightarrow P, \forall x.Q(x)$}
\RightLabel{($\vee$-R2)}
\UnaryInfC{$\forall x.(P \vee Q(x)) \Rightarrow P, P \vee (\forall x.Q(x))$}
\RightLabel{($\vee$-R1)}
\UnaryInfC{$\forall x.(P \vee Q(x)) \Rightarrow P \vee (\forall x.Q(x)), P \vee (\forall x.Q(x))$}
\RightLabel{(CONTRACTION-R)}
\UnaryInfC{$\forall x.(P \vee Q(x)) \Rightarrow P \vee (\forall x.Q(x))$}
\RightLabel{($\supset$-R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \forall x.(P \vee Q(x)) \supset P \vee (\forall x.Q(x))$}
\end{prooftree}
$$

3.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(INIT)}
\UnaryInfC{$P \Rightarrow P$}
\RightLabel{($\wedge$-L1)}
\UnaryInfC{$P \wedge Q(x) \Rightarrow P$}
\RightLabel{($\forall$-L)}
\UnaryInfC{$\forall x.(P \wedge Q(x)) \Rightarrow P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(INIT)}
\UnaryInfC{$Q(x) \Rightarrow Q(x)$}
\RightLabel{($\wedge$-L2)}
\UnaryInfC{$P \wedge Q(x) \Rightarrow Q(x)$}
\RightLabel{($\forall$-L)}
\UnaryInfC{$\forall x.(P \wedge Q(x)) \Rightarrow Q(x)$}
\RightLabel{($\forall$-R) (VC)}
\UnaryInfC{$\forall x.(P \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x.Q(x)$}
\RightLabel{($\wedge$-R)}
\BinaryInfC{$\forall x.(P \wedge Q(x)) \Rightarrow P \wedge (\forall x.Q(x))$}
\RightLabel{($\supset$-R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \forall x.(P \wedge Q(x)) \supset P \wedge (\forall x.Q(x))$}
\end{prooftree}
$$

4.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(INIT)}
\UnaryInfC{$R(x) \Rightarrow R(x)$}
\RightLabel{($\wedge$-L1)}
\UnaryInfC{$R(x)\wedge Q(x) \Rightarrow R(x)$}
\RightLabel{($\forall$-L)}
\UnaryInfC{$\forall x.(R(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow R(x)$}
\RightLabel{($\forall$-R)(VC)}
\UnaryInfC{$\forall x.(R(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x.R(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(INIT)}
\UnaryInfC{$Q(x) \Rightarrow Q(x)$}
\RightLabel{($\wedge$-L2)}
\UnaryInfC{$R(x)\wedge Q(x) \Rightarrow Q(x)$}
\RightLabel{($\forall$-L)}
\UnaryInfC{$\forall x.(R(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow Q(x)$}
\RightLabel{($\forall$-R)(VC)}
\UnaryInfC{$\forall x.(R(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x.Q(x)$}
\RightLabel{($\wedge$-R)}
\BinaryInfC{$\forall x.(R(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x.R(x))\wedge(\forall x.Q(x))$}
\RightLabel{($\supset$-R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \forall x.(R(x)\wedge Q(x)) \supset (\forall x.R(x))\wedge(\forall x.Q(x))$}
\end{prooftree}
$$

5.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(INIT)}
\UnaryInfC{$Q(x) \Rightarrow Q(x)$}
\RightLabel{(WEAKENING-R)}
\UnaryInfC{$Q(x) \Rightarrow Q(x), P$}
\RightLabel{(EXCHANGE-R)}
\UnaryInfC{$Q(x) \Rightarrow P, Q(x)$}
\RightLabel{($\supset$-R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow Q(x)\supset P, Q(x)$}
\RightLabel{($\exists$-R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \exists x.(Q(x)\supset P), Q(x)$}
\RightLabel{($\forall$-R)(VC)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \exists x.(Q(x)\supset P), \forall x.Q(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(INIT)}
\UnaryInfC{$P \Rightarrow P$}
\RightLabel{(WEAKENING-L)}
\UnaryInfC{$Q(x), P \Rightarrow P$}
\RightLabel{($\supset$-R)}
\UnaryInfC{$P \Rightarrow Q(x)\supset P$}
\RightLabel{($\exists$-R)}
\UnaryInfC{$P \Rightarrow \exists x.(Q(x)\supset P)$}
\RightLabel{($\supset$-L)}
\BinaryInfC{$(\forall x.Q(x))\supset P \Rightarrow \exists x.(Q(x)\supset P), \exists x.(Q(x)\supset P)$}
\RightLabel{(CONTRACTION-R)}
\UnaryInfC{$(\forall x.Q(x))\supset P \Rightarrow \exists x.(Q(x)\supset P)$}
\RightLabel{($\supset$-R)}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (\forall x.Q(x)\supset P)\supset \exists x.(Q(x)\supset P)$}
\end{prooftree}
$$