情報論理 第9回レポート. 解答

1. Formula A、formulaの列 Γ, Δ に対し、

$\vdash A[z/x], \Gamma \Rightarrow \Delta$ かつ、sequent $\exists x.A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ が z に関し eigenvariable condition (VC) を満たすなら、

$\models \exists x.A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ であることを示せば良い。

$\mathfrak{S}$を任意のstructure、$\mathcal{J}$を任意のvaluationとする。

[1] $[\![\bigwedge\Gamma]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{ff}$ 又は、$[\![\bigvee\Delta]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$ であった場合、$[\![\exists x.A \wedge \bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$ となり、$\models \exists x.A, \Gamma \Rightarrow \Delta$。

[2] $[\![\bigwedge\Gamma]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$ かつ、$[\![\bigvee\Delta]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{ff}$ と仮定。uを$\mathfrak{S}$のdomainの任意の要素とする。

帰納法の仮定: $\vdash A[z/x], \Gamma \Rightarrow \Delta$ より、$[\![A[z/x] \wedge \bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[z\mapsto u]} = \mathbf{tt}$.

したがって、$[\![A[z/x]]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[z\mapsto u]} = \mathbf{ff}$ 又は、$[\![\bigwedge\Gamma]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[z\mapsto u]} = \mathbf{ff}$ 又は $[\![\bigvee\Delta]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[z\mapsto u]} = \mathbf{tt}$.

ここで、Eigenvariable condition より、zはΓ及びΔにfreeには現れていない。

よって Lem 4.3.6 より、$[\![\bigwedge\Gamma]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[z\mapsto u]} = [\![\bigwedge\Gamma]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$ かつ、$[\![\bigvee\Delta]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[z\mapsto u]} = [\![\bigvee\Delta]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{ff}$

したがって、$[\![A[z/x]]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[z\mapsto u]} = \mathbf{ff}$.

よって Sublem 4.4.2 及び Lem 4.3.7 より、$[\![A]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[x\mapsto u]} = [\![A]\!]_{\mathfrak{S},(\mathcal{J}[z\mapsto u])[x\mapsto(\mathcal{J}[z\mapsto u](z))]} = [\![A[z/x]]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}[z\mapsto u]} = \mathbf{ff}$

これが任意のuに対し成り立つので、$[\![\exists x.A]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{ff}$. であり、$[\![\exists x.A \wedge \bigwedge\Gamma \supset \bigvee\Delta]\!]_{\mathfrak{S},\mathcal{J}} = \mathbf{tt}$ で、$\models \exists x.A, \Gamma \Rightarrow \Delta$

以上、[1]、[2]より示された。

□