平成２９年度 第２学年専門科目期試験答案用紙

No. 1

科目名	形式言語理論	試験日	2月2日（金）	所属及び学年	国立情報学研究所 アーキテクチャ科学研究系 准教授 14年目
学生証番号		氏名	蓮尾 一郎	連絡用Eメールアドレス	i.hasuo@acm.org

問1

$(Q, \Sigma, \delta : Q\times\Sigma \to Q, q_0, F)$

(1) 背理法。 $\exists M$: DFA, $\begin{cases} L(M) = L_N \\ |Q| < 2^N \end{cases}$ と仮定する.

長さ N の word 全体

$$K = \{a_1 a_2 \ldots a_N \mid a_i \in \Sigma\}$$

を考えて，各 $w \in K$ によって到達する M の状態

$$\delta^*(q_0, w) \quad \in Q$$

を考えると，

$$|Q| < 2^N = |K|$$

より，鳩の巣原理によって，

$$\exists \left| \begin{array}{l} w = a_1 a_2 \ldots a_N \\ w' = a_1' a_2' \ldots a_N' \end{array} \right| \quad \text{s.t.}$$

$$\begin{cases} w \neq w' & \text{— ①} \\ \delta^*(q_0, w) = \delta^*(q_0, w') & \text{— ②} \end{cases}$$

① より，ある index $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ について

$$a_i \neq a_i'.$$

簡単のため $a_i = 0$, $a_i' = 1$ とする（これにより一般性は失われない）.

いま $w\underbrace{00\ldots0}_{i-1}$, $w'\underbrace{00\ldots0}_{i-1}$ を考えると，

$\delta^*(q_0,\ w00\ldots0)\ \in F$

⇕

$w00\ldots0$ のうしろから N文字目は 0

$\|$ δ^*の def.

$\delta^*(\delta^*(q_0, w),\ 0^{i-1})$

$\|$ ②

$\delta^*(\delta^*(q_0, w'),\ 0^{i-1})$

$\|$ δ^*の def.

$\delta^*(q_0,\ w'00\ldots0)\ \notin F$

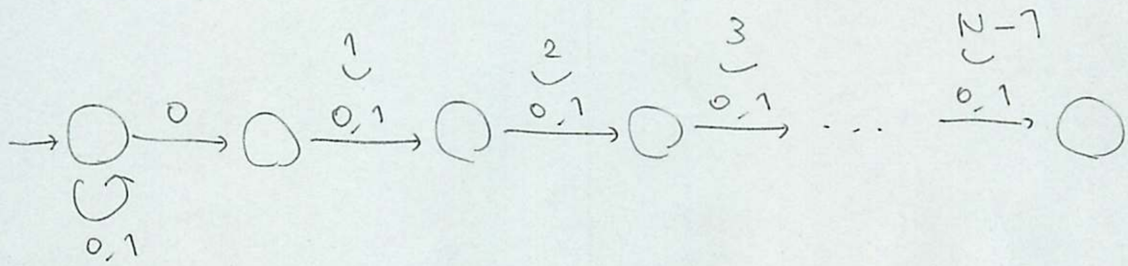
⇕

$w'00\ldots0$ の、うしろから N文字目は 1

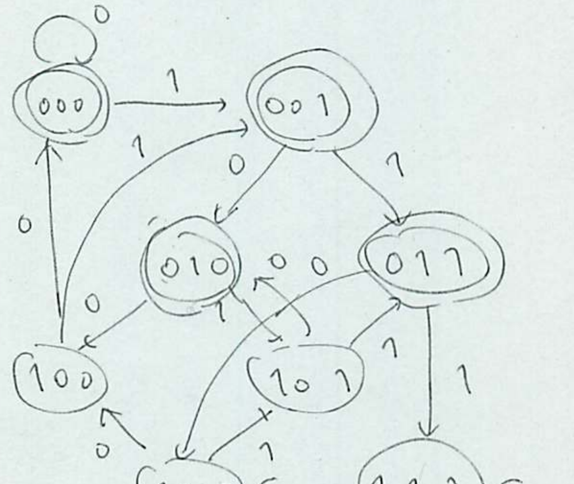
矛盾！

㊀

(2)



(3)



idea

- (2) を determinize して、最小化してもよい。
  ここでは直接作った。
- 最後の3文字をおぼえておく。たとえば (111) は (_ _ 1) も含む。
  まだなし
- (1) により最小性は明らか

問2

regular でない

context-free でない

- Pumping Lem. によって、context-free でないっていえる。

  (Pumping Lem. の定数 N に対して $w = 0^N 1^N 0^N 1^N$ をとる)

- (regular ⇒ context-free) の対偶より not regular.

問3

On-the-fly powerset construction をする。

「必要になったところだけ」

すなわち、($w = a_1 a_2 \ldots a_N$ とする。$a_i \in \Sigma$)

```
S ← {q0}
for i = 1 to N
  S' ← φ
  for q ∈ S
    for q' ∈ S
      if q -ai-> q'
        S' ← S' ∪ {q'}
      endif
    endfor
  endfor
  S ← S'
endfor
```

idea

$S = \{q'\}$

$q_0 \xrightarrow{a_1 a_2 \ldots a_i} q'$

最後に、$S \cap F \neq \emptyset$ か check

すると $|Q|$ に対する計算量は $O(|Q|^2)$

平成２９年度 第２学年専門科目期試験答案用紙

No. 1

科目名	形式言語理論	試 験 日	2月2日（金）	所属及び学年	
学生証番号		氏 名		連絡用Eメールアドレス	

問4

1. r_1, r_2 を ε-NFA M_1, M_2 に変換
(reg. exp. の構成に関し帰納的に)

2. M_2 を DFA M_2^d に変換
(powerset constr.)

3. M_2^d において ○ ⟷ ◎ の入替 で
$\overline{M_2^d}$ を得る

4. M_1 と $\overline{M_2^d}$ の synchronized product
$M_1 \times \overline{M_2^d}$ を構成

5. $M_1 \times \overline{M_2^d}$ の emptiness check
(◎への reachability check)

$L(r_1) = L(M_1)$
$L(r_2) = L(M_2)$

$L(M_2) = L(M_2^d)$

$L(\overline{M_2^d})$
$= \Sigma^* \setminus L(M_2^d)$

$L(M_1 \times \overline{M_2^d})$
$= L(M_1)$
$\cap \overline{L(M_2^d)}$

$L(M_1) \subseteq L(M_2)$
$\iff L(M_1)$
$\cap \overline{L(M_2)} = \emptyset$

$\boxed{問5}$

(1) $q_0' = (q_0, \varepsilon)$

$$F' = \{ (q, w) \mid \exists q' \in F.\ q \xrightarrow{w}_{\delta} q' \}$$

$\llcorner M$

<u>idea</u> - (q, w) は「Mにおいて w をよんだ結果 q に辿り着きました」のキモチ

- なので F' は「もう一度 w を読んだら◎に着くか？」というキモチ

同じ

(2) <u>reflexivity</u> $q \xrightarrow{w}_{\delta} q' \Longleftrightarrow q \xrightarrow{w}_{\delta} q'$ なので…

明らか

<u>symmetry</u> (略)

<u>transitivity</u> $w \equiv_M w'$, $w' \equiv_M w''$ とする。

任意の $q, q' \in Q$ について,

$$q \xrightarrow{w}_{\delta} q' \Longleftrightarrow q \xrightarrow{w'}_{\delta} q'$$

$w \equiv_M w'$ より

<u>goal</u> これを示したい

$$q \xrightarrow{w''}_{\delta} q'$$

$w' \equiv_M w''$ より

OK.

<u>right-invariance</u>

$w \equiv_M w'$ とする。また, $q, q' \in Q$ とする。

(<u>goal</u> $q \xrightarrow{wa}_{\delta} q' \Longleftrightarrow q \xrightarrow{w'a}_{\delta} q'$)

$$q \xrightarrow{w'a}_{\delta} q'$$

$$\Longleftrightarrow \exists q'' \in Q.\ \underbrace{q \xrightarrow{w}_{\delta} q''}_{} \xrightarrow{a}_{\delta} q'$$

$$\left[\begin{array}{c} \Updownarrow\ w \equiv_M w' \text{ より} \\ q \xrightarrow{w'}_{\delta} q'' \end{array}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \exists q'' \in Q.\ q \xrightarrow{w'}_{\delta} q'' \xrightarrow{a}_{\delta} q'$$

$$\Longleftrightarrow q \xrightarrow{w'a}_{\delta} q'. \quad \text{OK}$$

(3) $$\Sigma^*/\equiv_M \longrightarrow 2^{Q\times Q}$$

$$[w]_{\equiv_M} \longmapsto \{(q, q') \mid q \xrightarrow{w}_{\delta} q'\}$$
$(w \in \Sigma^*)$

とする。

Well-defined?

$$w \equiv_M w' \Longrightarrow \{(q,q') \mid q \xrightarrow{w}_{\delta} q'\} = \{(q,q') \mid q \xrightarrow{w'}_{\delta} q'\}$$

をいえばよい。これは $\equiv_M$ の def. そのもの.

また，上の関数が単射であることもすぐに示される（$\equiv_M$ の def. より）

よって $$|\Sigma^*/\equiv_M| \leq |2^{Q\times Q}|$$ ← Q: finite より finite

よって $\equiv_M$ は finite index.

$[\_]$ は $[\_]_{\equiv_M}$ の略記

(4)

$$\delta'' = \{ ((q, [w]), a, (q', [wa])) \mid (q, a, q') \in \delta \}$$

$$\cap$$

$$(Q \times (\Sigma^*/\equiv_M)) \times \Sigma \times (Q \times (\Sigma^*/\equiv_M))$$

$$q_0'' = (q_0, [\varepsilon])$$

$$F'' = \{ (q, [w]) \mid \exists q' \in F.\ q \xrightarrow{w}_\delta q' \}$$

<u>Well-definedness</u>

問題になるのは F'' のみ。

次を示せばよい:

$$w \equiv_M w'$$

$$\Longrightarrow \left((\exists q' \in F.\ q \xrightarrow{w}_\delta q') \iff (\exists q' \in F.\ q \xrightarrow{w'}_\delta q') \right)$$

これは $\equiv_M$ の def. より明らか。 □